[redacted] 1770.

Math. P. 79 f

Constat: 24 f:

Clairaut

12

ex Libris
A. Mariani
Moreis

<36620283250016
<36620283250016
Bayer. Staatsbibliothek

Math. P.

Mathesis. Geometria generalis
266.

R

Des

Herrn Clairaut,

der Königl. Französischen und Königl. Preußischen Akademien der Wissenschaften, der Königl. Gesellschaften zu London, Upsal und Edimburg, und der Akademie des Instituts zu Bologna Mitgliedes,

Anfangsgründe der Geometrie.

Aus dem Französischen übersetzt von

F. J. Bierling.

Neue Auflage.

Hamburg, bey Christian Herolds Wittwe.
1773.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht des Uebersetzers.

Man hätte sich billig verwundern müssen, wenn nicht in unsern Zeiten, da man schon mancher Wissenschaft ein neues Ansehen gegeben, ein erhabener Geist entstanden wäre, der auch die Mathematik durch eine leichtere Lehrart für Anfänger anmuthiger und begreiflicher zu machen suchte. Und dieses mußte in der That die gegründete Hoffnung aller derer seyn, welche gewohnt sind, die Wirkungen in ihren Ursachen zu entdecken. Denn als man anfieng, sich zu bestreben, die Einsichten unter den Menschen so allgemein als möglich zu machen, so ward die Reizung, deutlich zu seyn, unge-

mein stärker, als diejenige, bewundert zu werden.

Ich beschuldige hierdurch die bekannte mathematische Lehrart keiner Undeutlichkeit, keiner Widerwärtigkeit, für diejenigen, die von der Natur dazu gemacht sind, der Wahrheit bis in die verborgensten Gründe nachzugehen, und deren Geschmack so rein ist, daß sie sich, um der bloßen Trockenheit willen, durch keinen Eckel vom Genuß des Guten abhalten lassen. Aber wie sehr selten ist nicht die Temperaments-Mischung, bey welcher dieser Trieb statt findet? Die Erfahrung lehret, daß in wohl eingerichteten Schulen, wo alle Lernende, selbst auf Befehl der Landesherren, zur Mathematik angehalten werden, oft kaum der zehnte geneigt und fähig ist, ihren Kern aus den Schalen zu brechen.

Dennoch wird ein jeder aufmerksamer Zuschauer der Natur einräumen, daß insonderheit die geometrischen Wahrheiten leicht, und die natürlichsten von der Welt sind. Es beweisen solches fast alle Künstler und Handwerker, die irgend mit Zirkel und Linial umgehen. Alle machen sich, nach dem Grade ihrer Gemüthsfähigkeit,

gewisse

gewisse Regeln und Vortheile, die vielmals den Geometriekundigen zur Bewunderung nöthigen. Man höret es mit Vergnügen, wenn ein schlecht erfahrner Künstler, seinen besten hölzernen Zirkel in der Hand haltend, mit einer Art von Entzückung ausrufet: O! im Zirkel steckt vieles verborgen!

Diese Betrachtungen haben einen der größten Mathematikverständigen unserer Zeit schon vor etlichen Jahren bewogen, nach einer ganz neuen Methode zum Besten der Anfänger zu arbeiten, und dadurch den mathematischen Wissenschaften einen vielleicht noch wichtigern Dienst zu leisten, als er denselben durch seine hohen Entdeckungen zu anderer Zeit geleistet hat. Seine Absicht ist, alles, was er vorträgt, dermaßen leicht zu machen, daß es einem Anfänger nicht im mindesten scheinet, als ob er etwas lernen sollte; sondern er führet ihn Schritt vor Schritt an, sich dessen, was ihn der natürliche Verstand lehret, zu erinnern, sich unvermerkt an gewisse Benennungen zu gewöhnen, und durch seine ihm beywohnende Vernunft, Schlüsse daraus zu machen, zuweilen auch, gleichsam aus Neugierigkeit, Untersuchungen anzustel-

 len.

len. Kann wohl etwas natürlicheres in der Welt seyn? Und da ihm dieses so schön gelungen ist: wo bleibt die unvermeidliche Nothwendigkeit, gleich anfangs Erklärungen und Lehrsätze zu geben, welche doch mehrentheils keinen andern Eindruck bey dem Lernenden machen, als daß er durch neue Wörter erschreckt, durch abstracte Betrachtungen in Verwirrung gesetzt, und durch schwer einzusehende Dinge so weit gebracht wird, daß er zwar den Lehrer bewundert, zugleich aber zu zweifeln anfängt, ob er sie jemals begreifen werde? Jedoch der Herr Verfasser hat selbst in seinem Vorberichte zu diesem Werke die Nutzbarkeit seines neuen Unternehmens so klar gezeigt, daß es unnöthig wäre, mich weitläuftiger dabey aufzuhalten. Es wird vielmehr nützlich seyn, etlichen Einwürfen zuvor zu kommen, welche selbst von verständigen Personen theils wider ihn, theils wider den Uebersetzer, gemacht werden könnten.

Die Schärfe im Beweisen ist unstreitig die vornehmste Absicht, welche man sich im Vortrage mathematischer Wahrheiten vorsetzen muß: ein Punct, der von dem Herrn Verfasser, ungeachtet derselbe so gut als jemand davon überzeugt ist, zuweilen ver=

vernachläßiget zu seyn scheinet; wowider er sich aber bereits selbst im gedachten Vorberichte gerechtfertiget hat. Ich setze nur dieses hinzu, daß es, nach der von ihm beliebten Lehrart, nicht anders möglich war, als daß er, insonderheit im Anfange, manches als bewiesen voraus setzen mußte, bis sich die Gelegenheit von sich selbst anboth, den Beweis zu führen. Der Leser wird also vielmals in eine angenehme Verwunderung gesetzt werden, wenn er in der Folge der Abhandlung zuweilen einen Beweis nachgeholet findet, welchen er erst mit einigem Unwillen vermisset hatte. Das beste Beyspiel von dem, was ich sage, befindet sich im XXVI Art. des II Theiles, wo man alles, was wegen der Aehnlichkeit der Figuren im XXXIV und den folg. Art. des I Theiles, war voraus gesetzt worden, bewiesen siehet. Und daß der Herr Verfasser da, wo es nöthig ist, keinen Beweis vorbey lässet, erhellet unwidersprechlich aus des IV Theiles XXXI Artikel, wo er " diejeni-"gen Sätze, die, obgleich ihre Gewißheit "jedermann in die Sinne fällt, dennoch nach "geometrischer Schärfe erwiesen werden "müssen," von andern sehr wohl unterscheidet, deren Beweise er in seiner Vorrede " für, so zu sagen unnütze" erkläret.

Was aber andere Sätze anlanget, die er mit gutem Vorbedacht als Grundsätze unerwiesen annimmt, und deren Beweise er, selbst im Euklides, nur nach den damaligen Umständen der Zeit für nöthig ansiehet: so rechtfertiget er sich durch einen Vernunftschluß, wider welchen im Grunde wenig beträchtliches einzuwenden seyn möchte.

Man wird aus diesem allen leichtlich wahrnehmen, daß der Herr Clairaut fast bloß zum Endzwecke gehabt, die mathematische Erkenntniß allgemeiner zu machen. Und die Wahrheit zu sagen, so groß auch der Nutzen seyn kann, welchen die Welt schon von der Mathematik gehabt hat, so würde er sich doch unendlich weiter erstrecken, wenn diese Wissenschaft anfienge, in der menschlichen Gesellschaft mehr verbreitet zu werden. So lange sie noch in Lehrstühlen und in wenig Studierstuben, oder aufs höchste, in Feldlagern herberget, so lange wird noch der Künstler im Finstern tappen, und Bürger und Ackersmann in allerley Gewerben grobe Fehler begehen. Uebrigens wird auch des Herrn Verfassers Hoffnung gewiß nicht fehlschlagen, wenn er durch seine Lehrart

die

die Lernenden zum Nachforschen und zum Entdecken zu gewöhnen suchet. Denn wenn man siehet, wie leicht ihnen hier die Erfindung, und zugleich der Beweis des pythagorischen Lehrsatzes gemacht wird, so kann man mit der größten Wahrscheinlichkeit glauben, daß sie auch höhere Sätze, die doch vielleicht kaum so versteckt liegen, entdecken werden.

Ja; aber die Lehrart, wird man sagen, die alte gewöhnliche Lehrart ist eben das Vortrefflichste in der Geometrie, und was den Gelehrten auch in andern Wissenschaften ein Licht anzündet. Die Lehrart ist, wie ich schon oben bekannt habe, für wenige sehr vortrefflich, und ich zweifele sogar, ob, außer den Anfangsgründen, in den höheren Theilen der Mathematik eine so glückliche Aenderung mit derselben gemacht werden könnte. Aber man lasse uns erst sorgen, durch eine anmuthige und leichte Lehrart viel Schüler zu bekommen; alsdenn gewöhne man sie nach und nach, ihre Begriffe in eine Ordnung zu bringen, welche zu einem weiteren Fortgange in dieser Wissenschaft am geschicktesten ist: so wird man auch in den übrigen Wissenschaften noch eben denselben Nutzen von ihr spühren.

Ueberdieß sollte uns, wie mich bedünkt, die Vernunftlehre allein, (oder vielmehr selbst die Vernunft allein) auch ohne die Geometrie, die besten Regeln geben, in Wahrheiten, die nicht nothwendig sind, die möglichst untrügliche Gewißheit zu beobachten. Genug hiervon: ich schreibe nur einen Vorbericht zu einem übersetzten kleinen Buche.

Was nun diese Uebersetzung betrifft, so ist sie mit aller möglichen Sorgfalt ausgearbeitet worden; und ich hoffe dahero, daß sie dem Leser eben so brauchbar seyn wird, als es die Urschrift für diejenigen seyn kann, welche der französischen Sprache mächtig sind. In Ansehung der Kunstwörter bin ich mit dem gelehrten Herrn Uebersetzer der **Algebra** des Herrn Clairaut darinnen völlig einig, daß man dieselben sehr sparsam, und nicht ohne Noth, deutsch geben darf. Die Wörter **Circul** und **Triangel** u. a. m. auszumustern, habe ich für eben so unnöthig gehalten, als wenn man, anstatt **Punct** und **Linie**, **Tüpflein** und **Strich** setzen wollte. Im Gegentheile habe ich mich genöthiget gesehen, das Wort radius, so wie die Franzosen thun, nach seiner Bedeutung zu übersetzen. Der Inhalt des V

Art. des I Theiles wird sattsam zeigen, wie unumgånglich es war; und überdieß weiß ich auch nicht, warum die Linien, welche man aus dem Mittelpuncte eines Circuls nach dessen Umkreise ziehet, in Deutschland den **Strahlen** nicht eben so åhnlich seyn sollten, als sie es ehemals in Griechenland und in Italien waren, und als sie es noch itzo in Frankreich sind. In dem beobachteten Unterschiede zwischen **Circul** und **Zirkel** habe ich einen der gróßten deutschen Mathematikverständigen zum Vorgånger. Und was das deutschgeendete Wort **Rectangel** anlanget, so war es nicht möglich, mich dessen zu enthalten, weil die Benennung dieser Figur, deren Begriff in diesem Werke vielen andern Begriffen zum Grunde dienet, so oft vorkommt, daß es den gróßten Uebelklang verursachen würde, wenn man jedesmal z. E. långliches Viereck dafür gesetzet håtte. Wenn zuweilen unsere Sprache geschickt war, etwas auf eine andere Art deutlicher, als die französische, auszudrücken, so habe ich mir kein Bedenken daraus gemacht, den Vortrag zu verändern, um dem Leser einen Dienst zu erzeigen: welcher Methode ich schon in etlichen andern Uebersetzungen mit reifem Vorbedacht

gefol-

gefolget bin. Dagegen ist nicht zu läugnen, daß die französische Sprache den Herrn Verfasser oft in den Stand gesetzet, seinem Unterrichte ein noch viel gesprächigeres Ansehen zu geben, als es sich vielmals in unserer hat thun lassen; und es schien mir z. E. weit besser und mehr deutsch zu seyn, ein wenig gebietender zu schreiben: Setzet den Zirkel ꝛc. Ziehet einen Bogen ꝛc. als wenn ich dessen Höflichkeit im Lehren: Vous fixerez le compas &c. Vous tracerez un arc &c. nachgeahmet hätte. Ich wünsche, daß alle gute Absichten des Herrn Verfassers auch durch diese Uebersetzung noch mehr erlanget werden mögen. Weissenfels, den 18 April, 1753.

Vor-

Vorbericht
des Herrn Verfassers.

Obgleich die Geometrie an sich selbst abstract ist, so muß man dennoch gestehen, daß die Schwierigkeiten, so die Anfänger in dieser Wissenschaft finden, mehrentheils von der Lehrart herrühren, nach welcher sie in den gewöhnlichen Anfangsgründen vorgetragen wird. Man macht allezeit den Anfang mit vielen Erklärungen, Heischesätzen, Grundsätzen, und vorläufigen Gründen, welche dem Leser nichts als Trockenes zu versprechen scheinen. Und weil die darauf folgenden Sätze den Verstand nicht auf annehmlichere Objecte lenken, auch überdieß schwer zu begreifen sind, so erfolget daraus insgemein, daß die Anfänger Muth und Lust verlieren, bevor sie noch einen deutlichen Begriff von dem, was man sie lehren wollte, erlanget haben.

Es

Es sind zwar einige Schriftverfasser, um dieser der Geometrie natürlichen Trockenheit abzuhelfen, auf den Einfall gekommen, nach jedwedem wesentlichen Satze den Gebrauch, zu welchem er in der Ausübung dienen kann, beyzufügen. Allein, sie zeigen hierdurch die Nutzbarkeit der Geometrie, ohne die Mittel, wie man sie lernen soll, sehr zu erleichtern. Denn weil jeglicher Satz stets vor seiner Anwendung hergehet, so kommt der Verstand nicht eher auf sinnliche Begriffe zurück, als bis er die Unlust gehabt hat, abstracte Begriffe zu erreichen.

Gewisse Betrachtungen, so ich über die Geometrie angestellt, haben mich hoffen lassen, diese Unbequemlichkeiten zu vermeiden, wenn ich den doppelten Vortheil vereinigte, die Anfänger zu intereßiren und zu belehren. Ich habe bey mir gedacht, es müsse doch diese Wissenschaft, wie alle andere, nach und nach entstanden seyn. Es habe vermuthlich einige Bedürfniß den ersten Fortgang darinnen machen lassen; und es könne dieser erste Fortgang unmöglich über den Verstand der Anfänger seyn, weil es ja Anfänger waren, welche ihn machten.

Von diesem Begriffe eingenommen, habe ich mir vorgesetzt, auf dasjenige zurück zu gehen, was zur Geometrie hat Anlaß geben können.

nen Ich habe gesucht, durch eine dermassen natürliche Methode, daß solche für der ersten Erfinder ihre gehalten werden kann, die Gründe dieser Wissenschaft zu entdecken; dabey aber nicht vergessen, alle diejenigen mißgelungenen Versuche zu vermeiden, so jene nothwendig machen mußten.

Das Feldmessen ist meiner Meynung nach dasjenige, was am geschicktesten war, die ersten Sätze der Geometrie hervorzubringen; und es ist solches auch wirklich der Ursprung dieser Wissenschaft, weil Geometrie Erdmessen bedeutet. Einige Schriftsteller behaupten, es haben die Aegypter, da sie die Grenzen ihrer Erbe durch die Ueberschwemmungen des Nilstromes immerfort zerstöhret sahen, den ersten Grund zur Geometrie gelegt, indem sie Mittel und Wege suchten, von der Lage, der Größe und der Gestalt ihrer liegenden Gründe Gewißheit zu erlangen. Gesetzt aber, man wollte diesen Schriftstellern nicht beypflichten, so ist doch wenigstens kein Zweifel, daß die Menschen, schon von den ersten Zeiten her, sich nach Methoden bestrebet haben, ihre Felder zu messen und zu vertheilen. Da sie nun nachmals diese Methoden zur Vollkommenheit bringen wollten, so leiteten die besonderen Untersuchungen sie nach und nach auf allgemeine. Und da sie sich endlich vornahmen, das rich-

tige

tige Verhältniß aller Arten von Größen kennen zu lernen, so machten sie eine Wissenschaft von einem viel weitläuftigeren Gegenstande, als es derjenige war, welchen sie anfänglich gehabt hatten; und dennoch blieb ihr der Name, der ihr bey ihrem Ursprunge war beygeleget worden.

Um nun in diesem Werke einen ähnlichen Weg, wie die Erfinder, zu betreten, bestrebe ich mich zuerst, die Anfänger diejenigen Gründe entdecken zu lassen, auf welchen das bloße Ausmessen der Felder und der Weiten, wohin man kommen, oder nicht kommen kann, u. a. m. beruhet. Alsdenn gehe ich zu andern Untersuchungen fort, welche eine so große Aehnlichkeit mit jenen haben, daß die allen Menschen natürliche Neugierigkeit sie dabey stehen zu bleiben bewegt. Und indem ich hernach diese Neugierigkeit durch einige nützliche Anwendungen rechtfertige, so durchgehe ich alles dasjenige, was in der niederen Geometrie am meisten interessant ist.

Man kann, wie mich bedünkt, nicht in Abrede seyn, daß diese Methode zum mindesten dazu geschickt sey, diejenigen aufzumuntern, die vor der Trockenheit geometrischer Wahrheiten, wenn sie ohne Anwendung erscheinen, einen Eckel bekommen könnten. Ich hoffe aber, daß sie einen noch wichtigeren Nutzen haben werde, ich meyne, den Verstand zum Nachfor-

forschen und zum Entdecken zu gewöhnen: denn ich vermeide sorgfältig, einen einzigen Satz unter der Gestalt eines Lehrsatzes vorzubringen, nämlich, von derjenigen Beschaffenheit, da bewiesen wird, daß eine Wahrheit ist, ohne zu zeigen, wie man dahin gelanget ist, sie zu entdecken.

Daß die ersten Verfasser mathematischer Lehrbücher ihre Entdeckungen in Lehrsätzen vorgetragen, solches ist ohne Zweifel geschehen, um ihren Sachen ein desto wunderbareres Ansehen zu geben, oder auch, sich die Mühe zu ersparen, die Folge ihrer Begriffe, so ihnen in ihren Untersuchungen zum Leitfaden gedienet hatten, oft von neuem zu suchen. Dem sey nun wie ihm wolle, mir hat es weit dienlicher geschienen, meinen Leser beständig mit Aufgaben und mit deren Auflösungen zu beschäfftigen, das heißt, die Mittel zu suchen, Operationen anzustellen, oder unbekannte Wahtheiten zu entdecken, indem man das Verhältniß unter gegebenen und zu suchenden unbekannten Größen bestimmet. Denn solchergestalt bemerken die Anfänger bey jedwedem Schritte, den man sie thun lässet, den Bewegungsgrund des Erfinders: und hierdurch erlangen sie desto leichter den Trieb zum Erfinden.

Man wird mich vielleicht bey einigen Stellen dieses Werkes beschuldigen, als beriefe ich mich

allzu sehr auf den Augenschein, und beflisse mich nicht genugsam der Schärfe im Beweisen. Ich ersuche aber diejenigen, welche mir diesen Vorwurf machen könnten, zu beobachten, wie ich bloß solche Sätze seicht abhandele, deren Wahrheit sogleich erhellet, wenn man nur einige Aufmerksamkeit anwendet. Ich pflege dieses vornehmlich im Anfange zu thun, wo dergleichen Sätze öfterer vorkommen, weil ich bemerket habe, daß diejenigen, die eine Fähigkeit zur Geometrie besaßen, gern ihren Verstand ein wenig üben mochten, und hingegen einen Eckel bekamen, wenn man sie mit, so zu sagen, unnützen Beweisen überhäufte.

Euklides mag sich die Mühe geben, zu beweisen, daß zween Circul, welche sich durchschneiden, nicht einerley Mittelpunct haben, und daß die Summe der Seiten eines Triangels, welcher in einem andern beschrieben wird, kleiner ist, als die Summe der Seiten dieses andern Triangels, der ihn umschließet. Man hat sich darüber nicht zu verwundern. Er hatte hartnäckige Sophisten zu überzeugen, welche sich eine Ehre daraus machten, den deutlichsten Wahrheiten zu widerstreben. Die Geometrie hatte dahero, so wie die Logik, Vernunftschlüsse in bester Form nöthig, dem Schulgezänke den Mund zu stopfen. Itzo hat alles ein anderes Ansehen bekommen. Alle Vernunftschlüsse über

Dinge,

Dinge, die schon der natürliche Verstand im voraus lehret, sind heutiges Tages ganz umsonst, und dienen zu nichts, als die Wahrheit zu verdunkeln, und dem Leser einen Eckel zu machen.

Einen andern Vorwurf könnte man mir vielleicht machen, daß ich verschiedene Sätze ausgelassen, die in den gewöhnlichen Anfangsgründen ihren Platz finden, und daß ich, wenn ich Sätze abhandele, mir genügen lasse, nur die Hauptgründe davon anzugeben.

Ich antworte darauf, daß man in dieser Abhandlung alles findet, was zur Ausführung meines Vorhabens dienen konnte; daß die Sätze, welche ich auslasse, nur solche sind, die an sich selbst nicht den mindesten Nutzen schaffen, und auch überdies zur Erleichterung der Einsicht in diejenigen, deren Erlernung wichtig ist, nichts beytragen können; und, was die Proportionen anlanget, daß dasjenige, was ich davon sage, zureichend seyn muß, die elementarischen Sätze, welche sich auf selbige gründen, zu verstehen. Ich werde hiervon in meinen Anfangsgründen der Algebra künftighin ausführlicher handeln.

Da ich endlich das Ausmessen der Felder erkieset habe, die Sachen für Anfänger interessant zu machen: werde ich nicht vielleicht befürchten müssen, daß man diese Anfangsgründe mit den gewöhn-

gewöhnlichen Anweisungen zum Feldmessen vermengen möchte? Aber diese Gedanken könnten nur diejenigen hegen, die nicht erwägen wollten, daß das Ausmessen der Ländereyen nicht eigentlich der Gegenstand dieses Buches ist; sondern daß es mir bloß Gelegenheit giebt, die vornehmsten geometrischen Wahrheiten entdecken zu lassen. Ich hätte gleichergestalt auf diese Wahrheiten zurückgehen können, wenn ich die Historie der Physik, der Astronomie, oder irgend eines andern Theiles der Mathematik beschrieben hätte. Aber alsdenn würde die Menge fremder Begriffe, mit welchen man sich hätte beschäfftigen müssen, die geometrischen Begriffe, auf welche allein ich den Verstand des Lesers lenken mußte, gleichsam ersticket haben.

Anfangsgründe der Geometrie.

Erster Theil.

Von den Mitteln, die man natürlichster Weise anwenden mußte, zur Ausmessung der Felder und Plätze zu gelangen.

Was man, wie es scheinet, zuerst hat messen müssen, sind die Längen und die Weiten.

I.

Das Mittel, welches eine Art von natürlicher Geometrie zur Ausmessung einer jedweden Länge an die Hand giebt, ist, die Länge eines bekannten Maaßes mit derjenigen Länge, die man messen will, zu vergleichen.

II.

In Ansehung der Weite ist leicht zu sehen, daß man, um diejenige, die zwischen zweenen Puncten ist, zu messen, von einem zum andern eine gerade Linie ziehen muß; und daß man eben auf diese Linie das bekannte Maaß tragen muß, weil alle andere Linien nothwendig einen großen oder kleinen Umschweif machen, und dahero länger, als die gerade Linie, welche keinen macht, seyn müssen.

Die gerade Linie ist die kürzeste von einem Puncte zum andern, und folglich das Maaß der Weite zwischen zweenen Puncten.

III.

Außer dem, daß man nöthig hat, die Weite eines Punctes zum andern zu messen, geschieht es auch oft, daß man sich genöthiget siehet, den Abstand eines Punctes von einer Linie durch Messen zu finden. Zum Exempel, ein Mensch, der am Ufer eines Flusses in D stehet, will wissen, wie weit es von dem Orte seines Standes bis zum andern Ufer AB ist. Es ist klar, daß man in diesem Falle, um die gesuchte Weite zu messen, die kürzeste von allen geraden Linien DA, DB, u. s. w. welche man aus dem Puncte D nach der Linie AB ziehen kann, nehmen muß. Nun aber ist leicht zu sehen, daß diese kürzeste Linie, die man nöthig hat, die Linie DC ist, von welcher man voraus setzet, daß sie sich weder gegen A, noch gegen B neiget. Folglich ist es eben diese Linie, welcher man den Namen Perpendicul, oder senkrechte Linie, gegeben hat, auf die man das be-

1 Tafel. 1 Figur.

Eine Linie, die auf eine andere fällt.

bekannte Maaß tragen muß, um die Weite DC von dem Puncte D nach der geraden Linie AB zu bekommen. Aber man siehet auch ein, daß die Linie DC, wenn man das erwähnte Maaß auf sie tragen soll, schon gezogen seyn müsse. Es war dahero eine Methode nöthig, nach welcher man Perpendicular-Linien ziehen könnte.

ohne sich gegen irgend eine Seite zu neigen, ist mit derselben Linie perpendicular, oder senkrecht.

IV.

Man brauchte ferner, bey unzähligen anderen Gelegenheiten, dergleichen Linien zu ziehen. Man weiß, zum Exempel, daß die Regelmäßigkeit solcher Figuren, wie ABCD, FGHI, welche Rectangel genennt werden, und aus vier insgesammt perpendicularen Seiten bestehen, die Ursache ist, warum man den Häusern und ihren inneren Theilen, den Gärten, den Zimmern, den Strecken der Mauern u. a. m. deren Gestalt giebt.

2 u. 3 Fig.

Das Rectangel ist eine Figur von vier Seiten, die insgesammt mit einander senkrecht sind.

Die erste dieser Figuren, ABCD, deren vier Seiten einander gleich sind, wird ein Quadrat genennt. Die andere Figur, FGHI, in welcher nur die einander gegenüber stehenden Seiten von gleicher Länge sind, behält den Namen Rectangel.

Und das Quadrat ist ein Rectangel, dessen vier Seiten einander gleich sind.

V.

Bey den verschiedenen Arbeiten, wo erfordert wird, senkrechte Linien zu ziehen, ist die Frage, entweder sie auf eine Linie, aus einem außer ihr gegebenen Puncte, fallen zu lassen, oder sie aus einem in der Linie selbst befindlichen Puncte aufzurichten.

4 Fig. Einen Perpendicul aufzurichten.

Will man aus dem in der Linie AB befindlichen Puncte C die Linie CD auf AB senkrecht aufrichten, so muß dieselbe sich weder gegen A noch gegen B neigen.

Wenn man nun anfangs voraus setzet, daß C in gleicher Weite von A und von B abstehe, und daß die gerade Linie CD sich nach keiner von beyden Seiten neige, so ist klar, daß jedweder Punct dieser Linie von A und von B gleich weit entfernet seyn wird. Folglich kömmt es nur noch darauf an, einen gewissen Punct D zu finden, dessen Abstand vom Puncte A gleich sey desselben Abstande vom Puncte B. Denn wenn ich alsdenn durch C, und durch den zu findenden Punct D, die gerade Linie CD ziehe, so habe ich die verlangte senkrechte Linie.

Diesen Punct D zu bekommen, könnte man vor sich hin tappen. Allein, dieses thut dem Verstande kein Genüge; er verlanget vielmehr eine Methode, die ihn belehre. Diese ist folgende.

Nehmet ein gemeinschaftliches Maaß, zum Exempel eine Schnur, oder einen Zirkel, mit einer bestimmten Oeffnung, nachdem ihr entweder auf dem Felde, oder auf dem Papiere arbeitet.

Nachdem ihr das Maaß angenommen, so setzet in den Punct A das eine Ende der Schnur, oder den einen Fuß des Zirkels. Alsdenn drehet den andern Fuß, oder das andere Ende der Schnur, und ziehet den Bogen PDM. Ein gleiches verrichtet auch, doch ohne das Maaß

zu

zu verändern, in dem Puncte B, und beschreibet den Bogen QDN: dieser giebt euch in dem Puncte D, wo er den ersten Bogen durchschneidet, den verlangten Punct.

Denn weil der Punct D zu beyden, durch ein gemeinschaftliches Maaß beschriebenen Bögen PDM und QDN gehöret, so wird sein Abstand vom Puncte A dem Abstande vom Puncte B gleich seyn. Folglich wird die Linie CD sich weder nach A noch nach B neigen. Folglich wird diese Linie auf AB senkrecht stehen.

Wenn der Punct C sich nicht in gleicher Weite von den Puncten A und B befindet, so nehmet zween andere Puncte a und b an, welche von C gleich weit entfernet sind, und bedienet euch ihrer, anstatt der Puncte A und B, um die Bögen PDM und QDN zu beschreiben. 5 Fig.

4 Fig. Der Circul ist der ganze Zug, welchen der bewegliche Fuß eines Zirkels beschreibet, indem er sich um den andern veststehenden Fuß drehet.

VI.

Wenn einer von den Zügen, wie PDM ist, nach O, nach E, nach R, u. s. w. fortgesetzet wird, so lange bis er den ersten Punct P wieder erreichet, so heißt der ganze Zug der Umkreis (die Peripherie) eines Circuls, oder kurz, ein Circul; (Kreis.)

Ziehet man nur ein Stück PDM des Umkreises, so heißt dieses Stück ein Circulbogen.

Der veste Punct A heißt sein Mittelpunct, oder der Mittelpunct des Circuls.

Der Mittelpunct ist der Ort des veststehenden Zirkelfußes.

Der Strahl (radius) ist die Weite der Oeffnung des Zirkels.

Und die Zwischenweite, nämlich die Linie AD, heißt sein Strahl; (radius.)

Der Diameter ist die doppelte Länge des Strahles.

Eine jedwede Linie, wie DAE, die durch den Mittelpunct A gehet, und sich am Umkreise zu beyden Seiten endet, wird der Diameter (Durchmesser) genennt. Es ist klar, daß diese Linie die doppelte Länge des Strahles ist: dahero auch der Strahl des Circuls zuweilen der Semidiameter (Halbmesser) genennt wird.

VII.

6 Fig. Einen Perpendicul zu fällen.

Die Art, einen Perpendicul auf einer Linie AB aufzurichten, lehrt uns auch, aus einem jeglichen Puncte E, der außer dieser Linie angenommen wird, einen Perpendicul auf sie zu fällen. Denn wenn man in E entweder das Ende eines Fadens, oder einen Fuß des Zirkels setzet, und mit einerley Weite Eb, zween Puncte a und b, auf der Linie AB bemerket, so suchet man, wie im V Artikel, einen andern Punct D, dessen Abstand vom Puncte a und vom Puncte b gleich sey, und ziehet durch diesen Punct und durch E die gerade Linie DE, welche, weil sie mit ihren beyden Enden von a und von b gleich weit entfernet ist, und sich nach keinem von diesen Puncten mehr als nach dem andern neiget, auf AB senkrecht stehen muß.

VIII.

Aus der itzo beschriebenen Verrichtung erfolget die Auflösung einer neuen Aufgabe.

Man

Man verlanget eine gerade Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.

7 Fig. Eine Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

Man beschreibe aus den Puncten A und B, welche man zu Mittelpuncten annimmt, mit einer beliebigen Oeffnung des Zirkels, die Bögen REI, GEF. Ferner beschreibe man aus eben denselben Mittelpuncten, und mit der vorigen, oder auch mit einer willkührlich veränderten Oeffnung des Zirkels, die Bögen PDM, QDN: so wird die Linie ED, welche man durch die Durchschnittspuncte E und D ziehet, die Linie AB im Puncte C in zwey gleiche Theile theilen.

IX.

Nachdem die Art, senkrechte Linien zu ziehen, erfunden war, so war nichts leichter, als sich deren zu bedienen, um diejenigen Figuren zu beschreiben, die man Rectangel und Quadrate nennet, und deren wir im IV Artikel erwähnet haben. Man erkennet, daß zu Beschreibung eines Quadrates ABCD, dessen Seiten der gegebenen Linie K gleich seyn sollen, erfordert werde, auf der geraden Linie GE eine Weite AB, welche K gleich ist, zu nehmen, alsdenn (V Art.) aus den Puncten A und B die senkrechten Linien AD, BC, deren jedwede K gleich seyn muß, aufzurichten, und endlich die Linie DC zu ziehen.

2 Fig. Ein Quadrat zu beschreiben, dessen Seite gegeben wird.

X.

Verlanget man ein Rectangel FGHI zu beschreiben, dessen Länge K, und die Breite L seyn soll, so macht man FG gleich K; alsdenn errich-

3 Fig. Ein Rectangel zu beschreiben,

dessen Länge und Breite gegeben werden.

errichtet man die senkrechten Linien FI und GH, deren jedwede der Linie L gleich seyn muß, und endlich ziehet man die Linie HI.

XI.

Parallel-Linien sind solche Linien, die immer in gleicher Weite von einander abstehen.

Bey Anlegung neuer Wälle, Kanäle, Strassen u. d. m. brauchet man Parallel-Linien zu ziehen, das heißt, solche Linien, deren Lage so beschaffen ist, daß ihre Zwischenweiten überall senkrechte Linien von gleicher Länge zum Maaße haben. Um nun diese Parallel-Linien zu ziehen, dünkt uns nichts natürlicher zu seyn, als diejenige Methode zu erwählen, deren man sich bedienet, Rectangel zu beschreiben. Es sey zum Exempel AB die Seite eines Kanales oder eines Walles, 2c. 2c. welchem man die Breite CA geben wollte; oder, die Frage auf eine mehr geometrische und allgemeinere Art auszudrücken: man setze, daß man durch C die Linie CD mit AB parallel ziehen wollte, so nimmt man in der Linie AB einen beliebigen Punct B an, und verfähret auf eben die Weise, als ob man auf einer gegebenen Grundlinie AB ein Rectangel ABCD zu beschreiben hätte, dessen Höhe AC seyn sollte. Wenn man alsdenn die Linien CD, AB unendlich verlängerte, so würden sie allezeit parallel seyn, oder welches einerley ist, sie würden niemals zusammen stoßen.

8 Fig.

Durch einen gegebenen Punct eine Linie mit einer andern parallel zu ziehen.

XII.

Weil, wie wir bereits gesagt haben, die Regelmäßigkeit der rechtwinkelichten Figuren

Anlaß

Anlaß giebt, dieselben oft zu gebrauchen, so kommen sehr viel Fälle vor, wo es nöthig ist, ihren Inhalt zu wissen. Zum Exempel, es wird gefragt, wie viel Tapeten in ein Zimmer nöthig sind, oder wie viel der Bezirk eines Hauses, welcher die Gestalt eines Rectangels hat, Aecker rc. halten muß.

Man erkennet, daß zu Bestimmung solcher Größen das einfacheste und natürlichste Mittel ist, sich eines gemeinschaftlichen Maaßes zu bedienen, welches, wenn es auf die zu messende Fläche gewisse mal getragen wird, dieselbe völlig bedecket. Eine Methode, die mit derjenigen übereinkömmt, deren man sich zu Bestimmung der Länge der Linien bereits bedienet hat.

Nun ist klar, daß das gemeinschaftliche Maaß der Flächen selbst eine Fläche seyn muß, zum Exempel, die Fläche einer Quadrat-Ruthe, eines Quadrat-Schuhes, u. s. w. Ein Rectangel messen, heißt also, die Anzahl der Quadrat-Ruthen, oder der Quadrat-Schuhe u. s. w. bestimmen, die dessen Fläche in sich hält.

Man lasse uns, um dem Verstand zu Hülfe zu kommen, ein Exempel geben. Man setze, es 9 Fig.
halte das gegebene Rectangel ABCD 7 Schuhe in der Höhe und 8 Schuhe in der Grundlinie, so kann man dasselbe betrachten, als ob es in sieben Streifen a, b, c, d, e, f, g, getheilet wäre, deren jeglicher 8 Quadrat-Schuhe halten wird. Folglich wird der Inhalt des Rectangels 7mal 8 Quadrat-Schuhe, oder 56 Quadrat-Schuhe betragen.

Nun erinnere man sich der Anfangsgründe der Rechenkunst, und erwäge, daß zwo Zahlen multipliciren nichts anders heißt, als die eine so vielmal nehmen, als die andere Einheiten in sich hält, so wird man zwischen der gewöhnlichen Multiplication, und der Art, ein Rectangel zu messen, eine vollkommene Aehnlichkeit finden. Man wird sehen, daß, wenn man die Zahl der Ruthen, oder der Schuhe ꝛc. die dessen Höhe giebt, durch die Zahl der Ruthen, oder der Schuhe ꝛc. die dessen Grundlinie giebt, multipliciret, man dadurch die Menge der Quadrat-Ruthen, oder der Quadrat-Schuhe ꝛc. die dessen Fläche enthält, bestimmen kann.

Der Inhalt eines Rectangels ist das Product seiner Höhe durch seine Grundlinie.

XIII.

Die Figuren, so man zu messen hat, sind nicht allemal ordentlich, (regulär,) wie die Rectangel, und gleichwohl hat man oft nöthig, ihr Maaß zu wissen. Bald soll der Raum eines auf einem unordentlichen Platze angelegten Werkes bestimmet werden. Bald will man wissen, wie viel Aecker ein unordentlich umgrenztes Feld in sich schließet. Man brauchte dahero, außer der Methode, die Flächen der Rectangel zu bestimmen, auch eine andere, Figuren, die nicht rechtwinkelicht sind, auszumessen.

Man bemerket sogleich, daß in der Ausübung die Schwierigkeit bloß auf die geradlinichten Figuren ankömmt, dergleichen ABCDE* eine ist, nämlich solche Figuren, die von geraden Linien

Geradlinichte Figuren sind diejenigen, wel-

Linien umschlossen werden. Denn obgleich in dem Umfange eines Feldes, oder eines Platzes, sich einige krumme Linien befänden, wie in der Figur ABCDEFG, so ist doch klar, daß diese Linien, wenn sie in so viel Theile, als zu Vermeidung alles merklichen Irrthumes nöthig ist, zertheilet würden, als ein Zusammenhang gerader Linien angesehen werden könnten.

che von geraden Linien eingeschlossen werden.
* 10 Fig.
11 Fig.

Dieses vorausgesetzt erhellet, daß, ungeachtet der unendlichen Mannichfaltigkeit geradlinichter Figuren, man selbige doch alle auf einerley Art ausmessen kann, wenn man dieselben in Figuren von drey Seiten zertheilet, welche Triangel (Dreyecke) genennt werden. Dieses nun auf die einfacheste und bequemste Art zu verrichten, ziehet man aus einem beliebigen Puncte A in dem Umfange der Figur ABCDE die geraden Linien AC, AD ꝛc. nach den Puncten C, D ꝛc.

Der Triangel ist eine Figur, die von drey geraden Seiten eingeschlossen wird.
10 Fig.

XIV.

Es bleibt also nur noch die Frage übrig, das Maaß der gezogenen Triangel zu bekommen. Nun weiß man, daß zu Erfindung dessen, was uns unbekannt ist, das sicherste Mittel ist, zu untersuchen, ob in dem, was man weiß, sich nichts auf dasjenige beziehe, was man zu wissen begehret. Man hat aber bereits gesehen, daß ein jedes Rectangel, ABCD, gleich sey dem Producte seiner Grundlinie AB durch seine Höhe CB. Ueberdieß ist es auch leicht wahrzunehmen, daß diese durch die so genannte Diagonal-Linie AC überzwerch zerschnittene Figur

12 Fig.

Die Diagonal-Linie eines Rectangels ist die-

jenige Linie, welche dasselbe in zween gleiche Triangel theilete.

Figur in zween gleiche Triangel getheilet wird; und hieraus schließet man, daß ein jeglicher dieser Triangel gleich sey dem halben Producte seiner Grundlinie AB, oder DC, durch seine Höhe CB, oder DA.

Rechtwinkelichte Triangel sind diejenigen, von deren Seiten zwo senkrecht auf einander stehen.

Zwar haben die Triangel, welche man messen soll, nur selten zwo senkrecht auf einander stehende Seiten, wie die Triangel ABC, ADC, welche aus dieser Ursache rechtwinkelichte Triangel genennet werden; allein, wir können sie alle füglich in Triangel von dieser Gattung bringen.

II Taf. 1 Fig.

Denn man lasse aus dem Puncte A, dem Gipfel eines jedweden Triangels ABC, den Perpendicul AD auf die Grundlinie BC fallen, so wird der Triangel ABC in zween rechtwinkelichte Triangel, ABD und ADC, zerschnitten.

Ein Triangel ist die Hälfte eines Rectangels, welches einerley Grundlinie und einerley Höhe mit ihm hat.

Dieses zum Grunde gesetzt, erhellet deutlich, daß, gleichwie die zween Triangel ABD, ADC, die Hälften der Rectangel AEBD, ADCF seyn werden, gleicher Weise auch der gegebene Triangel ABC die Hälfte des Rectangels EBCF seyn wird, dessen Grundlinie BC, die Höhe aber AD ist. Weil nun die Fläche des Rectangels EBCF gleich ist dem Producte der Höhe EB, oder AD, durch die Grundlinie BC, so ist das Maaß des Triangels ABC die Hälfte des Productes der Grundlinie BC, durch den Perpendicul AD, oder die Höhe des Triangels.

Folglich ist dessen Inhalt das halbe Product seiner Höhe durch seine Grundlinie.

Man hat also nunmehr die Art, alle Felder und Plätze zu messen, die von geraden Linien eingeschlossen sind: denn man kann sie alle in

Trian-

Triangel bringen, und man hat auch gelernet, aus den Gipfeln dieser Triangel Perpendicul auf ihre Grundlinien zu fällen.

XV.

Weil man, nach der itzt angegebenen Methode, zur Ausmessung der Fläche der Triangel, nichts als ihre Grundlinien und ihre Höhen brauchet, so ziehet man hieraus diesen Lehrsatz, oder Theorema: Alle Triangel, wie ECB, ACB, die einerley Grundlinie CB haben, und deren Höhen EF, AD, einander gleich sind, sind von gleichem Inhalte.

2 Fig. Triangel, welche einerley Höhe und einerley Grundlinien haben, sind von gleichem Inhalte.

XVI.

Zur Erleichterung der Einsicht in diese Grundregel, welche uns das Maaß der Triangel giebt, haben wir für nöthig erachtet, zur Grundlinie nur eine solche Seite zu erwählen, welche ein aus der ihr gegenüber stehenden Spitze gefällter Perpendicul wirklich berühret; welches, wenn man nur das Ausmessen der Felder zur Absicht hat, allemal in unserer Willkühr stehet. Weil aber bey Vergleichung der Triangel, die einerley Grundlinie haben, die aus ihren Gipfeln gefällten Perpendicul außer den Triangeln fallen können, wie in der 3 Figur der Perpendicul GH zeiget, so wird nöthig seyn, zu untersuchen, ob es mit Triangeln, wie BCG ist, eine gleiche Bewandniß habe, ich will sagen, ob sie alle die Hälften der Rectangel, wie ECBF, seyn werden, welche zu ihrer Höhe den Perpendicul GH haben. 3 Fig.

Hier-

Hiervon nun kann man leichtlich überzeuget werden, wenn man bemerket, daß der Triangel CGH, als der Summe der zweenen Triangel, CGB und GBH, die Hälfte des Rectangels ECHG, als der Summe der zwey Rectangel ECBF und FBHG ist; und daß folglich die zween Triangel CGB und GBH, zusammen genommen, gleich sind der Hälfte des Rectangels ECHG. Nun ist aber der Triangel GBH die Hälfte des Rectangels FBHG: folglich ist der gegebene Triangel BCG die Hälfte des andern Rectangels ECBF, dessen Grundlinie BC, die Höhe aber GH ist.

XVII.

Der in den vorhergehenden drey Artikeln erwiesene Satz läßt sich auch auf folgende allgemeine Art ausdrücken.

4 Fig. Triangel, welche einerley Grundlinien haben, und zwischen einerley Parallel-Linien stehen, sind von gleichem Inhalte.

Die Triangel EBC, ABC, GBC, sind einander gleich, wenn sie einerley Grundlinie BC haben, und zwischen einerley Parallel-Linien, EAG, CBH, stehen; das heißt, wenn ihre Gipfel, E, A, G, in einer geraden Linie EAG liegen, die mit der andern CB parallel ist. Denn in diesem Falle sind (XI Art.) ihre Höhen, die durch die senkrechten Linien EF, AD, GH, gemessen werden, einander gleich.

XVIII.

Unter den verschiedenen geradlinichten Figuren, welche sich nach der vorher beschriebenen Methode messen lassen, sind deren eine gewisse

Gattung, welche der Regelmäßigkeit der Rectangel nahe kommen, nämlich solche Räume, wie ABCD, die von vier geraden Seiten eingeschlossen sind, deren jedwede mit ihrer gegenüber stehenden Seite parallel ist. Diese Figuren werden Parallelogramma genennt. Sie sind leichter zu messen, als die übrigen geradlinichten Figuren, ausgenommen die Rectangel. Denn wenn man das Parallelogrammum ABCD in zween Triangel ABC und ACD theilet, so sind dieselben, ohne allen Widerspruch, einander gleich. Weil nun jeglicher dieser Triangel der Hälfte des Productes der Höhe AF durch die Grundlinie BC gleich ist, so muß das Parallelogrammum das ganze Product der Grundlinie BC durch die Höhe AF zu seinem Maaße haben.

5 Fig.

Das Parallelogrammum ist eine Figur von vier Seiten, deren zwo einander gegenüber stehende parallel sind.

Sein Inhalt ist das Product seiner Höhe durch seine Grundlinie.

XIX.

Es erfolget hieraus, daß alle Parallelogramma, ABCD, EBCF, die einerley Grundlinie haben, und zwischen einerley Parallel-Linien stehen, einander gleich sind. Es ist dieses auch ohne dasjenige, was vorhin gezeigt worden, leicht zu erkennen, wenn man bemerket, daß aus dem Parallelogrammo ABCD das Parallelogrammum EBCF wird, wenn man zu jenem den Triangel DCF setzet, und von der ganzen Figur ABCF den Triangel ABE abschneidet: so daß klar erhellet, wofern man die zween Triangel DCF und ABE gleiches Inhaltes zu seyn voraussetzet, daß das Parallelogrammum

6 oder 7 Fig.

Parallelogramma, welche einerley Grundlinien haben, und zwischen einerley Parallel-Linien stehen, sind von gleichem Inhalte.

ABCD durch seine geschehene Verwandelung in EBCF die Größe seines Inhaltes nicht verändert hat. Um nun von der Gleichheit dieser zween Triangel überzeugt zu werden, hat man nur wahrzunehmen, daß, weil AB und CD, sowol als BE und CF, mit einander parallel sind, der Triangel ABE nichts anders seyn wird, als selbst der Triangel DCF, welcher auf seiner nach F verlängerten Grundlinie fortgerückt ist, so daß der Punct A in D, und E in F gekommen.

XX.

Ordentliche Vielecke sind Figuren, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden, die insgesammt einerley Neigung gegen einander haben.
8, 9 und 10 Fig.

Es giebt noch andere geradlinichte Figuren, die leicht zu messen sind, und welche man ordentliche Vielecke, (reguläre Polygone) nennet. Es sind Figuren, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden, und deren Seiten alle einerley Neigung gegen einander haben; wie ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH.

Da man gewohnt ist, den Wasserbehältern, den Springbrunnen, den öffentlichen Plätzen in Städten, u. a. m. die symmetrische Gestalt dieser Figuren zu geben, so wird nöthig seyn, bevor wir sie messen lehren, zu zeigen, wie sie beschrieben werden.

XXI.

Ein Vieleck von einer bestimmten Anzahl Seiten zu beschreiben.

Man beschreibe einen Circul, und theile ihn in so viel gleiche Theile, als man dem Vielecke Seiten geben will. Alsdenn ziehe man durch die Puncte A, B, D, E ꝛc. durch welche der Umkreis des Circuls zertheilet wird, die

Linien

Linien AB, BD, DE ꝛc. so bekommt man das verlangte Vieleck; welches ein Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, Achteck, Neuneck, Zeheneck, u. s. w. genennet wird, nachdem es entweder fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehen, oder mehr Seiten hat.

Das Fünfeck hat fünf, das Sechseck sechs, das Siebeneck sieben, das Achteck acht, das Neuneck neun, das Zeheneck zehen Seiten, u. s. w.

XXII.

Den Inhalt eines ordentlichen Vieleckes zu finden.

Das Maaß eines ordentlichen Vieleckes zu bekommen, könnte man die (im XIII Art.) für alle geradlinichte Figuren gegebene Methode anwenden. Aber es ist leicht zu bemerken, daß das kürzeste Mittel dazu ist, das Vieleck in gleiche Triangel zu theilen, deren gemeinschaftlicher Gipfel der Mittelpunct C ist. Denn weil (XIV Art.) der Inhalt eines Triangels das halbe Product seiner Höhe CK durch seine Grundlinie BD ist, so darf man nur einen dieser Triangel, zum Exempel CBD, nehmen, und auf dessen Grundlinie BD den Perpendicul CK fällen, welcher alsdenn das Apothema des Vieleckes genennt wird; und so giebt dieses Product, nämlich halb CK durch BD, wenn es so vielmal genommen wird, als das Vieleck Seiten hat, den Inhalt der ganzen Figur.

10 Fig.

Das Apothema ist der Perpendicul, welcher aus dem Mittelpuncte der Figur auf eine von ihren Seiten gefället wird.

XXIII.

Theilete man den Umkreis des Circuls in drey gleiche Theile, so entstünde daraus ein so genannter gleichseitiger Triangel. Und wenn dieser Umkreis in vier gleiche Theile getheilet würde, so bekäme man dadurch ein Quadrat.

Ein gleichseitiger Triangel ist derjenige, dessen drey Seiten einander gleich sind.

Es können aber diese zwo Figuren, welche die einfachesten unter allen Vielecken sind, auch ohne Beyhülfe der Eintheilung des Circuls beschrieben werden. Wie das Quadrat gemacht wird, haben wir schon oben (im IX Art.) gezeiget. Und wegen des gleichseitigen Triangels ist es leicht zu sehen, daß, wenn man ihn auf einer gegebenen Grundlinie AB beschreiben will, erfordert werde, aus den Puncten A und B, als aus Mittelpuncten, mit einer AB gleichen Oeffnung des Zirkels, die Bögen DCF und GCH zu entwerfen, hernach aus den Puncten A und B, nach dem Puncte C, die Linien AC und BC zu ziehen; welcher Punct C der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der zween Bögen DCF und GCH, und zugleich der Gipfel des Triangels seyn wird.

Wie ein gleichseitiger Triangel beschrieben wird.
11 Fig.

XXIV.

Zu dieser Art, den gleichseitigen Triangel und das Quadrat, als die ersten von allen Vielecken, geometrisch zu beschreiben, könnte ich noch, wie viel andere Geometrie-Lehrer in ihren Anfangsgründen gethan haben, die Art hinzusetzen, das Fünfeck auf eine geometrische Weise zu entwerfen. Weil aber die Anfänger, für welche allein wir hier arbeiten, die Wege, so der Verstand dabey hat suchen müssen, schwerlich finden würden, die Algebra aber uns in den Stand setzet, dieselben zu entdecken, so achten wir uns für verbunden, die Beschreibung des Fünfeckes in ein folgendes Werk zu verschieben, in welchem wir nicht nur die Beschreibung des Fünfeckes, sondern

dern auch der mehrseitigen Vielecke, welche sich ohne Beyhülfe der Algebra nicht geometrisch beschreiben lassen, dem Leser mittheilen werden.

Von denen Vielecken, die mehr als fünf Seiten haben, und von welchen ich sage, daß sie nicht ohne Beyhülfe der Algebra geometrisch beschrieben werden können, sind auszunehmen die Vielecke von 6, von 12, von 24, von 48 Seiten, u. s. w. imgleichen die Vielecke von 8, von 16, von 32, von 64 Seiten, u. s. w. welche sich nach denen Methoden, die uns die Anfangsgründe der Geometrie an die Hand geben, füglich beschreiben lassen, wie am Ende dieses ersten Theiles gezeiget werden wird.

XXV.

Ich wende mich itzo wieder zum Ausmessen der Felder, und bemerke dabey, daß diejenigen, die man messen will, oftmals der Ausübung dessen, was in den vorhergehenden Methoden vorgeschrieben worden, hinderlich sind.

Ich nehme an, es sey ABCDE die Figur eines Feldes, eines Bezirkes ꝛc. dessen Maaß man zu wissen begehret. Zufolge dessen, was man oben gelernet hat, müßte man die Figur ABCDE in die Triangel ABC, ACD, ADE zertheilen, alsdenn die Perpendicul EF, CH, BG fällen, und dadurch diese Triangel ausmessen. Befindet sich aber in dem Raume ABCDE einiges Hinderniß, zum Exempel eine Höhe, ein Wald, ein Teich, u. d. m. um deren willen man die benöthigten geraden Linien nicht 12 Fig.

ziehen kann: was wird alsdenn zu thun seyn, und welcher Methode wird man folgen müssen, um diesen Unbequemlichkeiten abzuhelfen? Keiner andern, als derjenigen, welche dem Verstande sogleich beyfällt, nämlich, einen ebenen Platz auszusuchen, auf welchem man bequemlich arbeiten könne, und auf demselben andere Triangel, welche den Triangeln ABC, ACD, ADE ꝛc. gleich und ähnlich sind, zu entwerfen. Itzt lasse man uns sehen, wie man es anfangen müsse, um andere dergleichen Triangel zu errichten.

XXVI.

III Taf. 1 Fig. Nach allen drey bekannten Seiten eines Triangels einen andern Triangel zu machen, welcher dem ersten gleich und ähnlich ist. 1 u. 2 Fig.

Wir setzen, das Hinderniß läge in dem Innersten des Triangels ABC, dessen Seiten bekannt wären, und man wollte auf dem erwählten Platze einen gleichen und ähnlichen Triangel machen. Man ziehe zuerst eine Linie DE, welche der Seite AB gleich ist. Alsdenn nehme man eine Schnur, so lang als BC, stecke eines ihrer Enden in E vest, und beschreibe den Bogen IFG, dessen Strahl (radius) die Schnur ist. Mit einer andern Schnure, so lang als AC, und deren eines Ende in D bevestiget wird, ziehe man den zweyten Bogen KFH, welcher den ersten in F durchschneidet. Wenn man alsdenn die Linien DF und FE ziehet, so bekömmt man einen Triangel DEF, welcher dem zu messenden Triangel ABC gleich und ähnlich ist. Denn es ist klar zu ersehen, daß, weil die Seiten DF und EF, welche im Puncte F zusammen stoßen, den Seiten AC und BC, welche

im Puncte C zusammen stoßen, einander (jedwede der ähnlich liegenden) gleich sind, und weil auch die Grundlinie DE der Linie AB gleich gemacht worden, es unmöglich wäre, daß die Lage der Linien DF und EF, über DE, von der Lage der Linien AC und BC, über AB, unterschieden seyn sollte. Es ist gewiß, daß man die Linien DF, EF sogar unter der Linie DE ansetzen könnte; und dennoch würde der Triangel noch eben derselbe seyn, und um die Grundlinie DE, welche der Linie AB gleich ist, nur umgekehret werden.

XXVII.

Könnte man nur zwo Seiten des Triangels ABC, zum Exempel, die Seiten AB, BC, messen, so ist deutlich zu sehen, daß man durch dieselben allein einen andern Triangel, welcher dem ersten ABC gleich und ähnlich wäre, nicht entwerfen könnte. Denn ob man schon die Linie DE der Linie BC, und die Linie DF der Linie BA gleich gemacht hätte, so wüßte man doch nicht, welche Lage man der letzten, in Ansehung der ersten, geben sollte. Es zeiget sich aber ein ganz einfaches Hülfsmittel, diese Schwierigkeit zu heben. Man läßt die Linie DF sich auf eben die Weise gegen DE neigen, wie AB sich gegen BC neiget; oder, mit den Geometriekundigen zu reden: man giebt dem Winkel FDE dieselbe Oeffnung, (Größe) welche ABC hat.

3 Fig.

3 u. 4 Fig.

Ein Winkel ist die Neigung einer Linie gegen die andere.

XXVIII.

Einen Winkel zu machen, der einem andern gleich ist.

Dieses zu bewerkstelligen, bedienet man sich eines Instrumentes, wie a b c, bestehend aus zwo Regeln, (Linialen) welche sich um b drehen lassen; und diese Regeln leget man an den Seiten AB und BC an. Hierdurch machen sie eben dieselben Winkel mit einander, welche die Seiten AB und BC machen. Leget man nun die Regel b c an die Grundlinie DE, so daß der Mittelpunct b auf den Punct D passet, die Oeffnung des Instruments aber einerley bleibet, so giebt die Regel a b die Lage der Linie DF, welche mit der Linie DE den Winkel FDE, gleich dem Winkel ABC, machen wird. Nun ist aber die Linie DF so lang, als BA gemacht worden: folglich darf man nur noch durch F und durch E die gerade Linie FE ziehen, so wird der Triangel FED dem Triangel ABC vollkommen gleich und ähnlich werden. Bey dieser ganz einfachen Verrichtung wird die klare Grundregel voraus gesetzt, daß ein Triangel durch die Länge zwoer von seinen Seiten, und durch deren Neigung gegen einander bestimmt wird; oder, welches auf eines hinaus läuft: daß zween Triangel einander gleich und ähnlich sind, wenn zwo von ihren ähnlich liegenden Seiten einander gleich sind, und der dazwischen befindliche Winkel eine gleich große Oeffnung hat.

Wenn zu einem Triangel zwo Seiten mit dem dazwischen befindlichen Winkel gegeben werden, so ist der ganze Triangel bestimt.

XXIX.

Es kann auch der Winkel FDE dem Winkel ABC auf folgende Art gleich und ähnlich gemacht werden.

Beschrei-

Beschreibet aus dem Mittelpuncte B, und mit einer beliebigen Weite B a, den Bogen a h c. Ferner aus dem Mittelpuncte D, und mit eben derselben Weite, den Bogen e i f. Alsdenn dürfet ihr nur noch einen Punct f suchen, der in dem Bogen e i f auf eben dieselbe Weise, wie der Punct a in dem Bogen c h a, lieget. Nun wird aber der Punct f leicht zu finden seyn, wenn ihr euch der geraden Linie a c bedienet, welche, nach der gewöhnlichen Erklärung, die Sehne des Bogens a h c genennt wird. 5 u. 6 Fig. Zweyte Art, einen Winkel dem andern gleich zu machen. Die Sehne eines Circulbogens ist die gerade Linie, welche von einem Puncte des Umkreises bis zu einem andern gehet.

Denn wenn ihr aus dem Mittelpuncte e, und mit einer Weite, die a c gleich ist, den Bogen l f k ziehet, so giebt euch der Durchschnitt der zween Bögen, e i f, l f k, den gesuchten Punct f.

Ziehet alsdenn durch D und durch f die Linie D f F, so bekommet ihr den Winkel, FDE, gleich ABC. Solches wird daraus klar, weil (XXVI Art.) die Triangel B a c, D f e, in allen ihren Theilen einander vollkommen gleich und ähnlich sind.

XXX.

Will man den Triangel FDE dem Triangel ABC gleich und ähnlich machen, und man kann doch nur eine von seinen Seiten messen, zum Exempel, die Seite BC, so bedienet man sich dazu der Winkel ABC und ACB. Erst macht man DE gleich BC. Alsdenn ziehet man die Linien FD und FE, so daß sie mit DE eben dieselben Winkel machen, wie AB und AC mit BC: so giebt der Punct, wo die Linien FD und FE 3 u. 4 Fig. Zween Winkel und eine Seite bestimmen den ganzen Triangel.

zusammen stoßen, den Triangel FDE, welcher dem Triangel ABC gleich und ähnlich ist. Der Grund zu dieser Arbeit ist an sich selbst dermaßen klar, daß er keines Beweises bedarf.

XXXI.

7 Fig. Könnte man von den drey Seiten eines Triangels ABC nur die Grundlinie BC messen, und man wüßte doch, daß es ein gleichschenkelichter Triangel ist, das heißt, daß dessen zwo Seiten, AB und AC, einander gleich sind, so ist klar zu sehen, daß es genug wäre, einen von den Winkeln ABC, ACB zu messen, weil alsdenn der andere ihm gleich seyn würde.

Ein gleichschenkelichter Triangel ist derjenige, welcher zwo gleiche Seiten hat.

Man wird die Ursache davon ohne Schwierigkeit einsehen, wenn man sich einbildet, was geschehen müßte, wenn man annimmt, es würden erst die zwo Seiten AB, AC des Triangels ABC auf die nach E und D verlängerte Grundlinie BC niedergelegt, hernach aber wieder aufgerichtet, und deren Enden, die itzo bey E und D gelegen, im Puncte A zusammen gesetzet. Denn so würde die gleiche Länge dieser zwo Seiten keine von beyden weiter als die andere kommen lassen. Folglich, nachdem man sie zusammen gefüget hätte, würden sie sich auf einerley Art gegen die Grundlinie BC neigen. Folglich würde der Winkel ABC dem Winkel ACB gleich seyn.

Die Winkel, so diese Seiten mit der Grundlinie machen, sind einander gleich.

XXXII.

Um wieder auf das Ausmessen der Felder zu kommen, so wird man befinden, daß, was für

Hinder-

Hindernisse man auch in ihrem Inneren finden möchte, es dennoch, nach der vorher gezeigten Methode, leicht sey, alle Triangel, in welche man einen zu messenden Raum getheilet hat, uf einen freyen Platz überzutragen.

Man setze, zum Exempel, man wolle einen Wald messen, dessen Figur ABCDEFG wäre. 8 Fig.

Entwerfet zuerst einen Triangel, welcher em Triangel ABC gleich ist: denn dieses önnet ihr verrichten, ohne in den Triangel inein zu gehen, wenn ihr die zwo Seiten B, BC, und den dazwischen befindlichen Winkel CBA messet.

Dieser entworfene Triangel giebt euch den Winkel BCA und die Länge der Seite AC. Weil ihr ferner die äußere Seite DC messen önnet, so bekommet ihr auch von dem Trianl CAD die Seiten DC und CA. Den Winkel DCA könnet ihr finden, wenn ihr erst den Winkel IKL dem Winkel DCB eich machet, und alsdenn auch den Winkel KO gleich dem Winkel BCA: denn so ergebt sich der übrig bleibende Winkel IKO, elcher dem gesuchten Winkel DCA gleich ist. 8 u. 9 Fig.

Nachdem ihr nun solchergestalt den Trianl ADC durch die zwo Seiten DC und A, und durch den dazwischen befindlichen inkel DCA bestimmet habet, so werdet auch auf eben dieselbe Weise den Triangel AG und das Uebrige der Figur zu suchen sen.

XXXIII.

Die itzt gegebene Methode, solche Felder auszumessen, in welchen man keine geraden Linien ziehen kann, giebt oft in der Ausübung selbst zu großen Schwierigkeiten Anlaß. Man findet selten einen ebenen und freyen Platz, der so groß wäre, daß man Triangel von gleicher Größe mit denen zu messenden darauf machen könnte. Gesetzt aber auch, man fände einen solchen Platz, so würde doch die große Länge der Seiten des Triangels die Arbeit ungemein beschwerlich machen. Aus einem Puncte auf eine Linie, die nur 500 Ruthen von ihm entfernet ist, einen Perpendicul fallen zu lassen, wäre eine höchst beschwerliche, ja in der Ausübung vielleicht unmögliche Sache. Es ist also von großer Wichtigkeit, ein Mittel zu haben, welches anstatt dieser weitläuftigen Arbeit dienen könne.

IV Taf. Dieses Mittel bietet sich gleichsam von sich selbst an. Man kömmt geschwind auf den Ein-
1 u. 2 Fig. fall, die zu messende Figur ABCDE durch eine ähnliche, aber kleinere Figur, abcde, vorzustellen, in welcher zum Exempel, die Seite ab hundert Zoll hält, wenn die Seite AB hundert Ruthen hält, und die Seite bc 45 Zoll, wenn BC 45 Ruthen lang ist; und hieraus endlich den Schluß zu machen, daß, wenn die Fläche der ins Kleine gebrachten Figur abcde 60000 Quadrat-Zoll beträgt, der Inhalt der Figur ABCDE 60000 Quadrat-Ruthen seyn müsse.

Aber

Aber vor allen Dingen muß man wissen, worinnen die Aehnlichkeit zwoer Figuren bestehet.

XXXIV.

Will man nun der Sache ein wenig nachdenken, so wird man bald einsehen, daß, wenn zwo Figuren A, B, C, D, E, a b c d e, einander ähnlich seyn sollen, dieselben so beschaffen seyn müssen, daß die Winkel A, B, C, D, E, der größeren den Winkeln a, b, c, d, e der kleineren gleich sind; und daß auch übrigens die Seiten a b, b c, c d, d e, e a der kleineren, eben so viel Theile p halten, als die Seiten A B, B C, C D, D E, E A der größeren Theile P in sich fassen. Worinnen die Aehnlichkeit zwoer Figuren bestehet.

XXXV.

Diese zweyte Bedingung drücken die Geometrie-Lehrer mit folgenden Worten aus: Es müssen die Seiten A B, B C, C D, u. s. w. den Seiten a b, b c, c d, u. s. w. proportional seyn; oder die Seite A B muß die Seite a b auf gleiche Weise enthalten, wie B C die Seite b c enthält, u. s. w.; oder, die Seite A B muß eben so groß seyn, in Ansehung der Seite a b, als es B C in Ansehung b c ist, u. s. w.; oder auch, es muß unter A B und a b eben dasselbe Verhältniß seyn, wie unter B C und b c, u. s. w.; oder auch endlich, A B muß seyn zu a b, wie B C zu b c, u. s. w. Alles dieses sind Redensarten, die einerley Sache ausdrücken, die man sich aber bekannt machen muß, um die Sprache der Geometriekundigen zu verstehen.

XXXVI.

XXXVI.

Nachdem wir gesehen haben, worinnen die Aehnlichkeit zwoer Figuren bestehet, so lasse man uns nunmehro auch nachforschen, welche Mittel und Wege uns die Natur an die Hand giebt, eine Figur zu beschreiben, welche der andern ähnlich ist. Man stelle sich zu dem Ende einen Zeichenmeister vor, der eine Figur im Kleinen nachzeichnen will.

Eine Figur zu machen, die einer andern ähnlich ist.

9 Fig. Zuerst ziehet er die Linie a b, welche ihm die Grundlinie A B der nachzuzeichnenden
10 Fig. Figur ABCDE vorstellet. Er neiget die Seiten a e, b c auf gleiche Weise gegen a b, wie AE und BC sich gegen AB neigen, und sorget dabey, daß die Längen der Linien a e und b c sich zu der Länge der Linie a b, wie die Längen der Linien AE und BC zu AB verhalten; das heißt, daß, wenn zum Exempel, AE die Hälfte von AB ist, die Linie a e die Hälfte von a b werde. Auf gleiche Weise verfähret er auch, um die Länge von b c, in Ansehung BC, zu bestimmen.

Wenn er nun solchergestalt die Puncte e und c bestimmet hat, so ziehet er zwo Linien e d und c d, welche er wiederum auf eben die Weise gegen die Linien e a und c b neiget, wie ED und CD sich gegen EA und CB neigen; und nachdem er diese Linien verlängert hat, bis sie im Puncte d zusammen stoßen, so vollendet er die Figur a b c d e.

XXXVII.

Will man nunmehr dieser Arbeit nachsinnen, so wird man sehen, daß sie sich bloß auf die Gleichheit der Winkel E, A, B, C, mit e, a, b, c, und auf das gleiche Verhältniß unter den Seiten EA, AB, BC, und den Seiten ea, ab, bc, gründet: so daß die Figur vollendet seyn wird, ohne daß man den Winkel d so groß, als den Winkel D, oder die Seiten ed, cd, den Seiten ED, CD, proportional gemacht hätte. Zwar könnte uns eben diese Betrachtung anfangs den Argwohn beybringen, es möchten die Winkel d und D einander nicht wirklich gleich, noch auch die Seiten ed, cd, mit den Seiten ED, CD, proportional seyn, und folglich die Figur abcde der Figur ABCDE nicht völlig ähnlich werden. Doch diesen Zweifel könnte uns schon die bloße Erfahrung benehmen; und überdieß sieht man auch durch eine kleine Aufmerksamkeit deutlich ein, daß aus der Gleichheit der vier ähnlich liegenden Winkel E, A, B, C, und e, a, b, c, und aus den proportionalen Längen der drey Seiten EA, AB, BC, und ea, ab, bc, die Gleichheit der Winkel Dd, und ein gleiches Verhältniß zwischen den Seiten ED, CD, und ed, cd, nothwendig erfolgen muß.

Doch allen Verdacht zu heben, wollen wir zeigen, daß alle Bedingungen, welche die Aehnlichkeit zwoer Figuren erfordert, nothwendiger Weise von einander abhangen; welches uns leicht zu bewerkstelligen seyn wird, wenn wir zuerst die Triangel, als die einfache-

sten Figuren, welche bey der Zusammensetzung aller anderen nothwendig sind, untersuchen werden. Und diese Untersuchung wird uns alle Eigenschaften und Nutzungen ähnlicher Figuren lehren.

XXXVIII.

3 u. 4 Fig. Wenn zween Winkel eines Triangels zweenen Winkeln eines andern Triangels gleich sind, so ist der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern gleich.

Wir setzen, man beschriebe auf der Grundlinie ab den Triangel abc, indem man nur die Winkel cab, cba, den Winkeln CAB, CBA, des Triangels ABC gleich machte; so wird man erstlich überzeugt werden, daß der dritte Winkel acb dem dritten Winkel ACB gleich ist.

Denn man lege den Triangel abc dergestalt auf den Triangel ABC, daß der Punct a auf A, ab auf AB, ac auf AC liege, so ist offenbar, daß cb mit CB parallel seyn wird: weil nämlich die Seite cb, ob sie schon unendlich verlängert würde, die gleichfalls unendlich verlängerte Seite CB nimmermehr berühren würde, wofern nicht diese zwo Linien sich auf ungleiche Weise gegen AB neigeten, und folglich die Winkel cba, CBA, ungleich wären: welches aber wider die vorausgesetzte Bedingung wäre.

Wie nun aus der Gleichheit der Winkel cba, CBA, folget, daß die Linien cb und CB mit einander parallel sind: also erfolget auch aus der parallelen Lage dieser Linien, daß die Winkel acb und ACB einander gleich sind; welches hier zu erweisen war.

XXXIX.

XXXIX.

Nun lasse man uns auch zeigen, daß die ähnlich liegenden Seiten zweener Triangel, acb und ACB, welche gleich große Winkel haben, proportional sind.

Zween Triangel, deren Winkel, nach ähnlicher Lage, einander gleich sind, haben proportionale Seiten.

Um unsere Begriffe auf etwas gewisses zu richten, setze man anfangs, es sey ab die Hälfte von AB; so werden wir zu erweisen haben, daß ac gleichermaßen die Hälfte von AC, und bc die Hälfte von BC sey. Es habe acb noch, wie im vorhergehenden Artikel, die Lage in Acb. Ziehet man cg mit AB parallel, so ist klar, daß diese Linie gleich ist bB, oder Ab, und gB gleich cb. Weil nun die Winkel cgC und Ccg den Winkeln cbA und cAb offenbarlich gleich sind, so wird (XXX Art.) der Triangel Ccg dem Triangel cAb gleich seyn. Folglich ist Cc gleich Ac, und Cg gleich cb, oder gB. Folglich wird Ac, oder ac, die Hälfte von AC, und cb die Hälfte von CB seyn. 3 u. 5 Fig.

Wenn ab drey- viermal, oder so vielmal, als man selbst will, in AB enthalten wäre, so wäre es ebenfalls leicht zu erweisen, daß ac eben so vielmal in AC, und cb in CB stecken würde. Denn wenn man aus den Theilungspuncten b und f der Grundlinie AB die Linien bc, fh ꝛc. mit BC parallel zöge, so könnte man längst der Linie AC drey, vier ꝛc. Triangel, Acb, chg, hCi ꝛc. ansetzen, welche alle dem Triangel acb gleich wären.

Wäre aber ab in AB, anstatt gewisse mal völlig, nur mit einem Bruche, zum Exempel 3 u. 6 Fig.

dritte-

drittehalb mal, enthalten, so könnte man erweisen, daß auch ac in AC, und bc in BC, beyde drittehalb mal stecken.

Denn wenn man vermittelst der Parallel-Linien bc, fh, längst der Linie AC die zween Triangel Acb, chg, welche acb gleich sind, angesetzet hätte, so bliebe zwischen den zwo Parallel-Linien hf und CB annoch Platz übrig, wohin man einen Triangel Chi setzen könnte, dessen Seiten die Hälften der Seiten von cAb wären. Solches ist klar zu ersehen, weil, nach der vorausgesetzten Bedingung, fB die Hälfte von Ab betrüge, und die Grundlinie hi des Triangels Chi, wegen der Parallel-Linien hf, CB, der Linie fB gleich wäre. Ueberhaupt also, wenn zween Triangel ABC, abc, gleich große Winkel haben, so haben diese Triangel, welche ähnliche Triangel genennet werden, proportionale Seiten; oder, welches einerley ist: die Seiten AB, BC, AC eines dieser Triangel ABC enthalten eine gleiche Anzahl Theile P, als die Seiten ab, bc, ac des andern Triangels abc Theile p in sich fassen. Denn P ist der Schuh, die Ruthe, u. s. w. oder überhaupt, der Maaßstab, nach welchem ABC ist errichtet worden; p aber der Maaßstab, welchen man zu Errichtung abc gebrauchet hat.

XL.

Aus dem itzo erwiesenen Satze ergiebt sich natürlicher Weise die Auflösung einer Aufgabe, die in der Ausübung oftmals nöthig ist.

Man

Man verlanget eine Linie in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen. Dieß könnte zwar durch Versuche geschehen, aber niemals mit derjenigen Gewißheit, welche die geometrische Schärfe giebt. Eine Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Wir setzen, es sollte die Linie AB in drey gleiche Theile getheilet werden. Erst ziehet man eine Linie AC, so lang, als man will, und welche mit AB einen beliebigen Winkel macht. Alsdenn trägt man mit willkührlicher Oeffnung des Zirkels auf die gezogene Linie AC drey gleiche Theile, Ac, ch, hC. Ferner ziehet man die Linie CB, und mit dieser die zwo Parallel-Linien cb, hf: so theilen die Durchschnittspuncte b und f die Linie AB in drey gleiche Theile; welches aus dem vorhergehenden Artikel klar ist. 5 Fig.

XLI.

Wollte man eine Linie in eine Bruchzahl Theile, zum Exempel, in drittehalb, oder in drey und ein Viertel Theile, u. s. w. eintheilen, oder man nähme sich überhaupt vor, die Linie AB im Puncte b dergestalt zu zerschneiden, daß AB zu Ab wie NO zu MQ wäre, so erkennet man abermals, daß die Auflösung dieser Aufgabe auf dem XXXIX Artikel beruhet; nämlich, man ziehet durch A nach Willkühr eine gerade Linie, trägt auf dieselbe die Theile MQ und NO, und ziehet endlich cb mit CB parallel: so ist der Punct b der verlangte Punct. Was die vierte Proportional-Linie zu drey anderen Linien ist, und wie sie gefunden wird. 6 Fig.

Diese itzt aufgelösete Aufgabe drücken die Geometrie-Lehrer auf folgende Art etwas anders aus: Zu drey gegebenen Linien NO, MQ, AB, die vierte Proportional-Linie zu finden.

XLII.

7 u. 8 Fig. Die Höhen ähnlicher Triangel sind mit deren Seiten proportional.

Es ist klar, daß zween ähnliche Triangel ABC, abc, nicht allein proportionale Seiten haben, sondern auch, daß die Perpendicul CF, cf, die man aus ihren Gipfeln C und c auf die Grundlinien AB und ab fället, in der Proportion der Seiten bleiben müssen. Es ist dieses aus dem Vorigen dermaßen leicht zu erweisen, daß wir uns nicht länger dabey aufhalten dürfen.

XLIII.

Betreffend die Flächen ähnlicher Triangel, wie ABC, abc, so ist leicht zu sehen, daß die Fläche des ersten eben so viel Quadrate X, nach dem Maaße P, halten wird, als die Fläche des zweyten Quadrate x, nach dem Maaße p, in sich hält. Denn weil CF und AB, nach dem vorhergehenden Artikel, eben so viel Theile P enthalten, als cf und ab Theile p in sich fassen, so giebt die Hälfte des Productes von CF durch AB, als das Maaß des Triangels ABC, (XIV Art.) eben dieselbe Zahl, die aus der Hälfte des Productes von cf durch ab, dem Maaße des Triangels abc, kömmt, doch mit dem Unterschiede, daß, weil die Linien CF und AB nach den Theilen P gerechnet werden, ihr Product nach Quadraten X zu rechnen

ist,

ist, da gegentheils die Linien cf und ab, die nach den Theilen p berechnet werden, ein Product geben müssen, das nach Quadraten x zu berechnen ist.

XLIV.

Was wir itzt von dem Maaße ähnlicher Triangel gezeigt haben, dienet nun zum Beweise eines Satzes, der in den Anfangsgründen der Geometrie gemeiniglich also ausgedrückt wird: Aehnliche Triangel, ABC, abc, verhalten sich unter einander wie die Quadrate ABDE, abde, ihrer ähnlich liegenden (oder gleichnamigen) Seiten AB, ab.

Die Flächen ähnlicher Triangel verhalten sich unter einander, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten.

Der im vorhergehenden Artikel enthaltene Beweis dieses Satzes leitet uns nothwendig auf diesen Schluß. Denn weil das Quadrat ABDE dieselbe Anzahl X, wie abde x, enthält, so ist offenbar, daß die zwo Zahlen der Quadrate X, welche das Verhältniß des Triangels ABC zum Quadrate ABDE ausdrücken, keine anderen sind, als die Zahlen der Quadrate x, welche das Verhältniß des Triangels abc zum Quadrate abde ausdrücken; oder, welches einerley ist, daß der Triangel ABC sich zum Quadrate ABDE verhält, wie der Triangel abc zum Quadrate abde.

Hieraus erfolget, daß, wenn zum Exempel, die Seite AB doppelt so lang, als die Seite ab wäre, der Triangel ACB viermal so groß im Inhalte, als der Triangel acb seyn würde; und daß, wenn die Seite AB dreymal so

lang, als ab wäre, der Triangel ACB neunmal größer, als der Triangel acb seyn müßte, u. s. w. Denn AB kann nicht doppelt so lang, als ab seyn, ohne daß das Quadrat ABDE viermal so groß, als das Quadrat abde werde, u. s. w.

XLV.

1 u. 2 Fig. (der IV Taf.) Eigenschaften ähnlicher Figuren, die aus den Eigenschaften der Triangel erfolgen.

Wir kommen nunmehr von den Triangeln auf die übrigen Figuren. Man nehme an, es würden an jeglichem der ähnlichen Triangel ABD, abd, zween andere Triangel ADE und BDC, ade und bdc, angesetzet, deren zween erste den zweenen letzten ähnlich wären, so befindet man, daß in den ganzen Figuren ABCDE, abcde,

1) Die Winkel A, B, C, D, E, den Winkeln a, b, c, d, e, gleich sind; welches daraus klar wird, weil jene sowol, als diese, theils ähnlich liegende Winkel ähnlicher Triangel sind, theils auch solche, welche aus diesen ähnlich liegenden Winkeln zusammen gesetzet sind.

2) Daß das Verhältniß der ähnlich liegenden Seiten DE, de, BC bc ꝛc. in den Figuren ABCDE, abcde, nothwendig einerley ist, das heißt, daß, wenn zum Exempel, P gewisse mal in der Grundlinie AB stecket, und auch p eben so vielmal in ab enthalten ist, P und p auch in jeglichen zwoen ähnlich liegenden Seiten, DE, de, nach einerley Anzahl enthalten seyn werden. Denn wegen der Aehnlichkeit der Triangel ABD, abd, ist die Anzahl von P, die AD in sich

fasset,

fasset, gleich der Anzahl von p, welche in ad enthalten ist. Betrachtet man alsdenn diese Seiten als die Grundlinien der ähnlichen Triangel ADE, ade, so wird die Anzahl der Theile P in der Seite DE eben so groß seyn, als die Anzahl der Theile p in der Seite de.

3) Wird man befinden, daß, wenn man in beyden Figuren ähnlich liegende Linien ziehet, zum Exempel, CE, ce, oder die Perpendicul DF, df ꝛc. dieselben insgesammt eben dasselbe Verhältniß unter einander haben, wie die ähnlich liegenden Seiten der zwo Figuren.

Folglich sind die Figuren ABCDE, abcde, in allen ihren Theilen einander vollkommen ähnlich.

XLVI.

Ist nun solchergestalt die Figur abcde der Figur ABCDE vollkommen ähnlich beschrieben worden, so ist klar zu sehen, daß, wenn man von neuem eine der Figur abcde völlig gleiche Figur, die folglich der Figur ABCDE wiederum ähnlich wäre, entwerfen wollte, es unnöthig wäre, alle Seiten und Winkel der Figur abcde zu messen, sondern daß es genug wäre, nur die drey Seiten, zum Exempel, ab, ea, bc, nebst den vier Winkeln e, a, b, c, zu nehmen, vermittelst deren allein man versichert seyn könnte, die der Figur ABCDE ähnliche Figur abcde aufs neue herzustellen: welches von demjenigen, was wir oben (im XXXVII Art.) nur vermuthet hatten, einen vollständigen Beweis abgiebt.

Doch man kann noch weiter gehen: denn es ist offenbar, daß man noch immer unterschiedene Arten hat, die Anzahl der Winkel und Linien, die man in einer Figur nothwendig messen muß, zu verbinden, um eine andere, welche ihr proportional sey, zu beschreiben. Aber ich würde den Leser nur ermüden, wenn ich alles weitläuftiger anführen wollte.

XLVII.

Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich unter einander, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten.

Durch Schlüsse, dergleichen wir uns im XLIII Artikel bedienet haben, ließe sich auch erweisen, daß die Zahl der Quadrate X, die in der Figur ABCDE enthalten sind, eben dieselbe ist, wie die Zahl der Quadrate x, so die Figur abcde in sich hält; und daß folglich die Flächen ähnlicher Figuren sich unter einander verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

XLVIII.

Aehnliche Figuren sind in nichts unterschieden, als in den Maaßstäben, nach welchen sie beschrieben werden.

Alles, was von der Aehnlichkeit der Figuren bisher gezeigt worden ist, läßt sich in diese einzige Grundregel bringen: Daß ähnliche Figuren in nichts unterschieden sind, als in den Maaßstäben, nach welchen sie sind beschrieben worden.

XLIX.

Damit man nunmehr desto besser verstehen lerne, wie man ähnliche Triangel und verminderte (verjüngte) Größen zur Ausmessung solcher Felder, auf welchen man nicht bequemlich

:emlich arbeiten kann, zu gebrauchen habe, soll uns die Figur ABCDEF den Umfang ies Thiergartens, eines Teiches, u. d. m. rstellen, dessen Raum, oder Größe man stimmen will. Zuerst messe ich eine von n Seiten der Figur, zum Exempel FE, id bemerke, wie viel Ruthen, oder Klaftern u. d. m. diese Seite enthält. Alsdenn :hme ich nach Willkühr einen Maaßstab, id ziehe auf Pappe oder Papier eine Linie fe, eich so vielen Theilen des Maaßstabes, als E Ruthen oder Klaftern u. d. m. hielt. erner mache ich die Winkel def, dfe leich den Winkeln DEF, DFE, so bekomme h den Winkel edf, in welchem ich den Perendicul eg auf df fallen lasse. Wenn dieses eschehen ist, und nachdem ich die Linien df nd eg vermittelst des Maaßstabes gemessen abe, so mache ich den Schluß: So viel ese Linien verjüngte Theile halten, eben so el werden die Linien DF und EG Ruthen,)er Klaftern u. d. m. in sich fassen. Folglich, enn ich DF durch die Hälfte von EG ultiplicire, so bekomme ich den Inhalt des riangels EDF; und nachdem ich auf eben eselbe Art einen jedweden der übrigen Trian- el DCF, BCF, ABF gemessen, so bekomme) den wahren Inhalt der ganzen Figur. V Taf. 1 u. 2 Fig.

L.

Im wirklichen Ausmessen der Felder soll an ostmals die Weite eines Ortes F, wo man Die Weite eines Ortes zu messen, wohin man

nicht kommen kann. man ist, von einem andern Orte D nehmen, zu welchem man gewisser Hindernisse wegen nicht kommen kann. Eine neue Aufgabe, deren Auflösung aber schon im vorherstehenden Artikel voraus gegeben worden. Denn weil man, um DF zu messen, nichts anderes brauchte, als die Aehnlichkeit der Triangel def und DEF, so ist außer Zweifel, daß, wenn man eine Grundlinie, welche es auch sey, zum Exempel EF, misset, und aus den Puncten F und E den Punct D nur sehen kann, die Aufgabe aufgelöset ist, das heißt, daß man die Weite FD hat.

LI.

Der Gebrauch des oben (im XXVIII Art.) 3 Fig. beschriebenen Instrumentes, wie bAc, bestehend aus zwo Regeln, welche sich um den Punct A, wo sie zusammen gefüget sind, frey umdrehen lassen, giebt oft zu vielen Irrungen Anlaß. Bald wird sich die Oeffnung des Winkels im Wegtragen verändern; bald wird auch die Gestalt des Instrumentes, welche man ihm, besseren Gebrauches wegen, nothwendig geben muß, hinderlich seyn, es auf die Fläche, wo man die verjüngte Figur machen will, geschickt anzulegen.

Hierzu kömmt noch, daß bey jedwedem neuen Winkel, BAC, den man auf diese Art aufnimmt, erfordert wird, das Instrument von neuem auf das Papier zu bringen; und daß übrigens dieß Instrument zu Vergleichung

chung zweener Winkel kein anderes Mittel giebt, als dieselben über einander zu legen, ohne daß man dadurch, weder von ihrem Verhältnisse, noch von ihrer Größe an sich selbst, Gewißheit bekommt.

LII.

Es war dahero nöthig, ein bestimmtes Maaß für die Winkel zu suchen, gleichwie man schon eines für die Längen hatte; es war auch nicht schwer, dasselbe zu finden. Denn man lege die Regel A b vest, und setze die andere Regel A c daran. Alsdenn lasse man diese letzte sich um den Punct A drehen: so ist offenbar, daß, wenn man an das eine Ende c der beweglichen Regel A c eine Feder, oder einen Bleystifft bevestiget, wodurch die Spur des Punctes c sichtbar wird, daß, sage ich, diese Spur, welche einen Circulbogen beschreibet, das richtige Maaß des Winkels für jegliche Oeffnung der Seiten A b, A c, geben wird; das heißt, daß wegen der Gleichförmigkeit der Krümme des Circuls, eine doppelte, dreyfache, vierfache Oeffnung von c A b allezeit einen doppelten, dreyfachen, vierfachen Circulbogen c b einschließen wird.

4 Fig.

Das Maaß eines Winkels ist der Circulbogen, den seine Seiten zwischen sich einschließen.

LIII.

Wenn man dahero annimmt, es werde der Umkreis b c d f g, welchen der ganze Umlauf des Punctes c beschreibt, in eine willkührliche Menge gleicher Theile getheilet,

so wird die Anzahl derjenigen Theile, welche der zwischen den Linien A c und A b eingeschlossene Bogen in sich hält, die Oeffnung dieser Linien, oder den Winkel c A b, welchen sie mit einander machen, richtig messen.

Der Circul wird eingetheilet in 360 gleiche Grade; jedweder Grad in 60 Minuten; u. s. w.

Die Geometriekundigen theilen allezeit den Circul in 360 gleiche Theile, welche Grade genennet werden; wiederum einen jeden Grad in 60 Minuten, und jede Minute in 60 Secunden, u. s. w. Derowegen hat, zum Exempel, ein Winkel b A c 70 Grade und 20 Minuten, wenn der Bogen b c, der ihm zum Maaße dienet, 70 von den 360 Graden, oder Theilen, des Circuls, und überdieß 20 sechzigste Theile eines solchen Grades hält.

LIV.

5 Fig.

Ein rechter Winkel (Quadrant) hält 90 Grade, und seine Schenkel stehen senkrecht auf einander.

Hieraus erfolget, daß ein Winkel CAB von 90 Graden, welcher ein rechter Winkel (Quadrant) genennt wird, derjenige ist, dessen Schenkel, AC und AB, den vierten Theil eines Circuls zwischen sich einschließen, und senkrecht auf einander stehen.

LV.

Ein spitziger Winkel ist kleiner, als ein rechter Winkel.

6 Fig.

Ein jeder Winkel, welcher kleiner, als ein rechter Winkel ist, das heißt, der weniger als 90 Grade hält, heißt ein spitziger Winkel. Dergleichen sind die Winkel CAB, FAG, EAG.

LVI.

LVI.

Im Gegentheile heißt ein stumpfer Winkel derjenige, der mehr als 90 Grade hält, wie der Winkel FAB.

Ein stumpfer Winkel ist größer, als ein rechter Winkel.

LVII.

Es ist klar, daß alle Winkel, wie GAF, FAE, EAC, CAB, die man nach einer Seite auf einer geraden Linie GB machen kann, und deren Spitzen in einen gemeinschaftlichen Punct A treffen, zusammen genommen, 180 Graden gleich sind, das heißt, zweenen rechten Winkeln, deren Maaß ein halber Circul ist.

Die Summe aller Winkel, so man nach einer Seite auf einer geraden Linie machen kan, und welche in einen Punct zusammen stoßen, beträgt 180 Grade.

LVIII.

7 Fig.

Gleichergestalt ist die Summe aller Winkel, EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, welche man rings um den Punct A, als deren gemeinschaftliche Spitze, machen kann, 360 Graden gleich, das heißt, vier rechten Winkeln, deren Maaß ein ganzer Circul BCDEF, ist.

Alle Winkel, so man um einen Punct herum machen kann, sind, zusammen genommen, vier rechten Winkeln gleich.

LIX.

Nachdem wir befunden, daß die Winkel zu ihrem Maaße die Theile des Circuls haben, so lasse man uns auch sehen, wie man es angreift, wenn man die Anzahl der Grade, welche ein Winkel hält, bestimmen will.

8 Fig.

Man brauchet hierzu das Instrument I, welches ein Astrolabium, oder Feld-Winkelmesser genennet wird. Es bestehet aus zwo Regeln, EAC, DAB, von gleicher Länge,

Gebrauch des Feld-Winkelmessers, (Astrolabii) die Größe eines Winkels zu messen.

Länge, die sich in ihrer gemeinschaftlichen Mitte, dem Puncte A, durchkreuzen, und an ihren Enden mit Diopteren (Gesichtern) versehen sind. Eine von den beschriebenen Regeln EC, ist um den Punct A beweglich*; die andere, DB, ist vest, und dienet zum Diameter eines halben Circuls DCB, welcher in seine 180 Grade ꝛc. eingetheilet ist.

Verlanget man nun den Winkel zu wissen, welchen zwo Linien machen, die man aus dem Orte, wo man stehet, nach zwey Objecten, F, G, ziehet, so setzet man erst die veste Regel, DAB, dergestalt, daß das Auge, wenn man es an D hält, eines der beyden Objecte, z. E. F, durch die zwo Diopteren D und B sehen kann. Alsdenn, doch ohne das Instrument zu verrücken, drehet man die bewegliche Regel so lange, bis das Auge, wenn es in E kömmt, durch die Diopteren E und C, das andere Object, G, sehen kann: so zeiget die bewegliche Regel auf dem in Grade ꝛc. getheilten halben Circul die Zahl der Grade, Minuten ꝛc. welche der zu messende Winkel GAF hält.

LX.

Gebrauch des Winkelmessers, (Transporteur) einen Winkel von einer bestimmten Anzahl Grade zu machen.
*9 Fig.

Will man auf dem Papiere einen Winkel von einer bestimmten Anzahl Grade machen, so bedienet man sich des Instrumentes K*, welches der Transporteur, oder Winkelmesser, genennt wird, und dessen halber Circul

* Sie wird zuweilen die Alidade genennt.

cul in 180 Grade getheilet ist. Man setzet nämlich den Mittelpunct A auf die Spitze des Winkels, welchen man ziehen will, und die Seite AB des Instrumentes auf die Linie AB, welche man die eine Seite des Winkels werden läßt. Alsdenn bemerket man auf dem Papiere den Punct C, wo die Zahl der Grade, so der zu ziehende Winkel halten soll, auf dem Instrumente geschrieben stehet; und nachdem man durch den Mittelpunct A und den bemerkten Punct C die Linie ACO gezogen hat, so ergiebt sich der Winkel OAG, welcher die verlangte Anzahl Grade enthält.

LXI.

Nunmehr setze man, man wolle auf dem Papier über einer zur Grundlinie angenommenen Linie, FG, einen Triangel FGH machen, welcher einem andern, auf dem Felde aufgenommenen Triangel ABC ähnlich wäre. Zuerst bedienet man sich des Feld-Winkelmessers, zu erfahren, wie viel Grade ein jeglicher der Winkel CAB, CBA, hält. Hernach macht man, vermittelst des Winkelmessers, die Winkel HFG und HGF, (nach ähnlicher Lage) gleich den Winkeln CAB und CBA; und weil sodann der Punct H, wo die Seiten FH und GH zusammen stossen, nebst dem Winkel FHG, durch diese Arbeit nothwendig bestimmt ist, so bekömmt man den Triangel FGH, welcher dem Triangel ABC vollkommen ähnlich ist.

VI Taf. 1 u. 2 Fig.

LXII.

LXII.

Weil, wie wir bereits gesagt haben, im wirklichen Ausmessen sehr viel darauf ankömmt, daß die Winkel genau gemessen werden, so ist es nicht genug, sie aufzunehmen, gesetzt auch, daß es mit den vollkommensten Instrumenten geschähe, sondern man muß auch ein Mittel erfinden, die Richtigkeit ihres Maaßes zu untersuchen, um selbiges, wo es nöthig ist, zu verbessern. Dieses Mittel nun ist ganz einfach und leicht. Man nehme wiederum den Triangel ABC vor sich. Man siehet, daß die Größe des Winkels C aus der Größe der Winkel A und B erfolgen muß: denn vergrößerte oder verminderte man diese zween Winkel, so würde die Lage der Linien AC und BC verändert werden, und folglich auch der Winkel C, den diese Linien mit einander machen. Richtet sich nun dieser Winkel nach der Größe der Winkel A und B, so läßt sich nichts anders vermuthen, als daß die in den Winkeln A und B enthaltenen Grade die Zahl der Grade, welche der Winkel C halten soll, bestimmen müssen; und daß folglich dessen Größe zu Bestätigung der Richtigkeit dessen, was man zu Bestimmung der Winkel A und B gethan hat, dienen kann: immaßen man überzeugt wird, die Winkel A und B richtig gemessen zu haben, so bald man hernach auch den Winkel C misset, und ihn von derjenigen Anzahl Grade findet, die ihm in Ansehung der Größe der Winkel A und B zukömmt.

Da-

Damit man einsehe, wie aus der Größe der Winkel A und B die Größe des Winkels C geschlossen werden könne, so lasse man uns untersuchen, was diesem Winkel wiederfahren würde, wenn die Linien AC, BC, entweder mehr zusammen stießen, oder auch weiter aus einander gerückt würden. Man setze zum Exempel, es drehe sich die Linie BC an dem Puncte B, von AB weg, und nach BE; so ist klar, daß, indem BC sich drehet, der Winkel B immer weiter, der Winkel C hingegen immer enger werden muß: welches sogleich vermuthen lässet, daß auf solchen Fall die Verminderung des Winkels C der Vermehrung des Winkels B gleich seyn werde; und daß folglich die Summe der drey Winkel, A, B, C, allezeit einerley bleiben müsse, welcherley Neigung auch die Linien AC, BC, gegen die Linie AE machen. 3 Fig.

LXIII.

Nun führet aber diese vermuthete Folgerung ihren Beweis mit sich. Denn man ziehe die Linie ID mit AC parallel, so siehet man erstlich, daß die Winkel ACB und CBD, welche Wechselswinkel genennet werden, einander gleich sind: welches klar zu ersehen ist, weil, da die Linien AC, IB, parallel sind, sie sich auf einerley Weise gegen CBO neigen müssen, so daß der Winkel IBO dem Winkel ACB gleich wird. Nun wird aber der erste, IBO, auch dem Winkel CBD gleich seyn, weil die Linie ID sich gegen CO nicht mehr von einer, als 4 Fig.

Wechselswinkel sind umgekehrte Winkel, welche eine gerade Linie, wenn sie zwo Parallel-Linien durchschneidet, von beyden Seiten der macht.

als von der andern Seite neiget. Folglich wird der Winkel DBC, welcher IBO gleich ist, seinem Wechselswinkel ACB gleich seyn.

Diese Winkel sind einander gleich.

LXIV.

Man wird zweytens finden, daß der Winkel CAE dem Winkel DBE gleich ist, weil CA und DB mit einander parallel sind. Folglich könnten die drey Winkel des Triangels einer neben dem andern gesetzet werden, so daß deren Gipfel im Puncte B zusammen stießen; und alsdenn würde man sehen, daß die drey Winkel DBE, CBD, und CBA, welche den ersten drey Winkeln CAB, ACB, CBA, gleich sind, zween rechte Winkel zusammen machen; (LVII Art.) Und weil alles dasjenige, was wir itzo erwiesen haben, sich auch auf alle andere Triangel deuten läßt, so wird man dadurch von dieser allgemeinen Eigenschaft der Triangel überzeugt werden: Daß die Summe aller drey Winkel eines Triangels allezeit einerley ist, und gleich zweenen rechten Winkeln, oder 180 Graden.

Die Summe aller drey Winkel eines Triangels ist zweenen rechten Winkeln gleich.

LXV.

Um also aus zweenen schon gemessenen Winkeln eines Triangels den Inhalt des dritten Winkels zu schließen, muß man die Zahl der Grade, welche beyde gemessene Winkel zusammen machen, von 180 Graden abziehen. Es giebt uns diese Eigenschaft der Triangel eine sehr bequeme Methode an die Hand, die Richtigkeit des Maaßes der Winkel eines Triangels zu bestätigen; und man

wird

wird noch unzählige andere Nutzungen davon einsehen, je weiter man in der Geometrie kommen wird. Wir wollen uns hier begnügen lassen, die unmittelbaresten Folgerungen daraus herzuleiten.

LXVI.

Ein Triangel kann nicht mehr, als einen rechten Winkel haben; noch weniger kann er mehr, als einen stumpfen Winkel in sich fassen.

In einem Triangel kann nur ein rechter Winkel seyn.

LXVII.

Wenn einer der drey Winkel eines Triangels ein rechter Winkel ist, so ist die Summe der zweenen anderen allezeit einem rechten Winkel gleich.

Wenn ein Winkel eines Triangels ein rechter Winkel ist, so ist die Summe der zweenen anderen einem rechten Winkel gleich.

Diese zween Sätze sind so klar, daß sie keines Beweises bedürfen.

LXVIII.

Verlängert man eine Seite des Triangels, ABC, z. E. die Seite AB, so ist der äußere Winkel, CBE, allein so groß, als die zween inneren, ihm gegenüber stehenden BCA und CAB, zusammen genommen. Denn man setze zu dem Winkel CBA entweder die beyden Winkel BCA und CAB, oder den Winkel CBE, so wird die Summe allezeit 180 Graden, oder zweenen rechten Winkeln gleich seyn. (LXIV Art.)

Der äußere Winkel eines Triangels ist so groß, als die zween inneren, ihm gegen über stehenden zusammen.

LXIX.

Wenn von einem gleichschenkelichten Triangel ABC ein Winkel bekannt ist, so sind die beyden übrigen bekannt.

5 Fig.

Ein Winkel eines gleichschenkelichten Triangels giebt die zween übrigen Winkel.

Es sey der Winkel an dem Gipfel A bekannt, so ist offenbar, daß, wenn man die Zahl der Grade, so dieser Winkel hält, von 180 Gra-

den, als dem Maaße aller drey Winkel eines Triangels, abziehet, die Hälfte der übrig bleibenden Summe das Maaß eines jeglichen Winkels B, C, an der Grundlinie seyn wird.

Weiß man einen dieser Winkel B, C, so giebt seine doppelte Größe, von 180 Graden abgezogen, den Winkel am Gipfel A.

LXX.

In einem gleichseitigen Triangel hält jeglicher Winkel 60 Grade.

Weil ein gleichseitiger Triangel nichts anders ist, als ein gleichschenkelichter, bey welchem man jegliche seiner Seiten zur Grundlinie annehmen kann, so ist klar, daß dessen drey Winkel einander nothwendig gleich sind, und daß jeglicher 60 Grade hält, nämlich den dritten Theil von 180 Graden.

LXXI.

Ein Sechseck zu beschreiben.

Hieraus ergiebt sich von sich selbst die Beschreibung des Sechseckes, welche wir oben (im XXIV Art.) versprochen hatten.

Denn eine Linie, die uns den Umkreis des Circuls in sechs gleiche Theile theilen soll, muß seyn die Sehne eines Bogens von 60 Graden, nämlich des sechsten Theiles von 360 Graden, als des Inhaltes des ganzen Umkreises.

6 Fig.

Setzet man nun voraus, es sey die Linie AB diese Sehne, und man ziehet aus dem Mittelpuncte I, nach den Endpuncten A und B die Strahlen AI, und IB, so wird der Winkel AIB 60 Grade halten; und weil die zwo Seiten AI und IB einander gleich sind, so wird der Triangel AIB gleichschenkelicht seyn. Folglich, weil der Winkel am Gipfel von 60 Graden ist, wird

jeglicher

jeglicher der zween übrigen Winkel ebenfalls 60 Grade, als die Hälfte von 120, halten. Folglich wird (LXX Art.) der Triangel AIB gleichseitig seyn. Folglich wird die Linie AB dem Strahle des Circuls gleich seyn. Und hieraus erfolget endlich, daß, wenn man ein Sechseck beschreiben will, man den Zirkel in der Weite des Strahles öffnen, und diese Weite sechsmal nach einander auf den Umkreis tragen muß: so bekommt man die sechs Seiten des Sechseckes.

LXXII.

Nachdem das Sechseck ABCDEF beschrieben ist, so kann man auch leichtlich das Zwölfeck beschreiben.

Dieses zu bewerkstelligen, theilet man den Bogen AKB, oder den Winkel AIB, in zwey gleiche Theile, so wird die Linie AK, als die Sehne des halben Bogens AKB, die Seite des Zwölfeckes seyn.

Die Hälfte des Winkels am Mittelpuncte im Sechsecke giebt den Winkel am Mittelpuncte für das Zwölfeck.

LXXIII.

Um nun den Bogen AKB in zween gleiche Bögen, AK und KB, zu theilen, hat man eben dasselbe zu verrichten, als ob man die Sehne AB in zwey gleiche Theile theilen wollte: nämlich, man beschreibet aus den Puncten A und B, als aus Mittelpuncten, und mit einer beliebigen Oeffnung des Zirkels, die Bögen MLN, OLP; alsdenn ziehet man durch den Punct L, wo die beyden Bögen einander durchschneiden, und durch den Mittelpunct I die Linie LI: diese theilet sowol den Bogen AKB, als die Sehne AB in zwey gleiche Theile.

Einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

LXXIV.

Vielecke von 24, von 48 rc. Seiten zu beschreiben.

Nun folge man der itzt gegebenen Methode, und theile den Bogen AK in 2 gleiche Bögen, so wird die Sehne eines von diesen neuen Bögen die Seite des Vieleckes von 24 Seiten seyn. Auf gleiche Weise bekömmt man auch die Vielecke von 48, von 96, von 192 Seiten, u. s. w.

LXXV.

Beschreibung des Achteckes;

7 Fig.

Damit man nun auch das Achteck beschreiben lerne, so errichte man zuerst ein Quadrat in dem Circul, welches geschiehet, wenn man im Circul zween Diameter AIB und CIE ziehet, welche sich in rechten Winkeln durchschneiden, und aus den Endpuncten dieser Diameter die Linien AC, CB, BE, und AE ziehet.

Denn wegen der Regelmäßigkeit des Circuls und der Gleichheit der vier Winkel, welche aus den Perpendiculn AIB und CIE entstehen, werden die vier Seiten AC, CB, BE, EA, einander nothwendig gleich seyn, und sich auf gleiche Weise gegen einander neigen müssen: welche Eigenschaften allein dem Quadrate zukommen.

Nachdem nun solchergestalt das Quadrat beschrieben worden, so theilet man, nach der vorhin gegebenen Methode, jeglichen Bogen CKB, BLE rc. in zwey gleiche Theile: so bekommt man das Achteck CKBLEMAN.

Und der Vielecke von 16, von 32 rc. Seiten.

Theilet man wieder auf gleiche Weise jeglichen Bogen CK, KB rc. in 2, in 4, in 8 gleiche Theile, u. s. w. so bekommt man die Vielecke von 16, von 32, von 64 Seiten, u. s. w.

Anfangsgründe
der
Geometrie.

Zweyter Theil.

Von der
Geometrischen Methode, geradlinichte Figuren zu vergleichen.

Wenn man dasjenige, wodurch wir gezeiget haben, wie man zur Ausmessung der Felder und Plätze gelanget ist, aufmerksam erwogen hat, so muß man wahrgenommen haben, daß die Lagen der Linien gegen einander gewisse Anmerkungen an die Hand gaben, die an sich selbst, und außer dem Nutzen, welchen sie in der Ausübung bringen konnten, der Aufmerksamkeit würdig waren; und es ist zu vermuthen, daß eben diese Anmerkungen die ersten Erd-

messer bewogen, ihre gemachten Entdeckungen höher zu treiben. Denn die Bedürfnisse der Menschen sind nicht das einzige, was sie antreibet; die Neubegierigkeit ist oftmals ein nicht minder starker Bewegungsgrund, sie zum Nachforschen zu ermuntern.

Was noch überdieß zur Aufnahme der Geometrie hat dienen müssen, ist der Geschmack, den wir von Natur an derjenigen genauen Richtigkeit finden, ohne welche dem Verstande niemals eine Genüge geschieht.

Als man dahero im Ausmessen der Figuren gewahr ward, daß in unzähligen Fällen die Maaßstäbe und die Winkelmesser die Größen der Linien und der Winkel nur ungefähr gaben, so suchte man gewisse Methoden, die Mängel der Instrumente zu ersetzen.

Itzt wollen wir die geradlinichten Figuren wieder vor uns nehmen, uns aber in allem, was wir, um deren richtige Verhältnisse zu entdecken, thun werden, nur bloß des Liniales und des Zirkels bedienen.

Es wird oft erfordert, entweder verschiedene Figuren in eine einzige zu bringen, die jeglicher insbesondere ähnlich sey, oder auch, aus einer Figur andere von gleicher Gattung zu machen. Dieses läßt sich bewerkstelligen, wenn man anfangs nach Rectangeln arbeitet: weil alle geradlinichte Figuren nichts anders, als Zusammensetzungen von Triangeln sind, und weil jeglicher Triangel die Hälfte eines Rectangels ist, welches eine

gleiche

gleiche Höhe und gleiche Grundlinie mit ihm hat.

I.

Um die Rectangel mit einander zu vergleichen, muß man ein jedwedes Rectangel in ein anderes verwandeln können, welches einerley Fläche mit ihm hat, dessen Höhe aber unterschieden ist. Denn wenn zwey Rectangel in zwey andere von gleicher Höhe verwandelt werden, so sind sie nur nach ihren Grundlinien unterschieden. Das größte ist dasjenige, welches die längste Grundlinie hat, und es enthält das kleinere auf eben die Weise, wie seine Grundlinie die Grundlinie des kleineren Rectangels in sich hält; welches insgemein folgendermaßen ausgedrückt wird: Zwey Rectangel, die einerley Höhe haben, verhalten sich gegen einander, wie ihre Grundlinien.

Zwey Rectangel von gleicher Höhe verhalten sich gegen einander, wie ihre Grundlinien.

II.

Zwey dergleichen Rectangel in eines zu bringen, darf man nur eines neben das andere setzen.

III.

Eben so leicht wird es seyn, das kleinere von dem größeren abzuziehen.

IV.

Will man ein Rectangel in eine bestimmte Anzahl kleinerer Rectangel, die alle einander gleich sind, eintheilen, so theilet man dessen Grundlinie in so viel gleiche Theile, als man

Rectangel verlanget, und richtet alsdenn aus den Theilungspuncten senkrechte Linien auf.

V.

VII Taf. 1 Fig. Ein Rectangel in ein anderes von gegebener Höhe zu verwandeln.

Nunmehr werde verlangt, das Rectangel ABCD in ein anderes BFEG von gleicher Fläche zu verwandeln, dessen Höhe BF aber gegeben wird.

Man bemerke, daß, weil sein Inhalt das Product seiner Höhe durch seine Grundlinie seyn wird, es nöthig sey, daß das verlangte Rectangel BFEG, dessen Höhe größer, als BC seyn soll, eine kleinere Grundlinie, als AB, bekomme; das heißt, daß, wenn BF, zum Exempel, doppelt so lang, als BC ist, BG nur die Hälfte von AB seyn müsse.

Wäre BF dreymal so lang, als BC, so müßte BG nur der dritte Theil von AB seyn.

Gleichermaßen befindet man, daß, wenn BF, anstatt BC, gewissemal völlig in sich zu halten, es nur mit einem Bruche, zum Exempel zwey und ein Drittel mal, hielte, das Rectangel BFEG nicht von gleicher Größe mit dem Rectangel ABCD seyn könnte, ohne daß seine Grundlinie BG ebenfalls zwey und ein Drittel mal in seiner Grundlinie AB enthalten wäre. Ueberhaupt ist leicht zu sehen, daß, wenn zwey Rectangel, ABCD und BFEG, einander gleich seyn sollen, die Grundlinie BG des einen in der Grundlinie AB des andern eben so enthalten seyn müsse, wie die Höhe BC in der Höhe BF.

Es wird also nur noch erfordert, die Linie AB dergestalt einzutheilen, daß AB zu GB sich verhalte, wie BF zu BC; welches geschieht, wenn man (I Th. XLI Art.) die Linie FA, und aus dem gegebenen Puncte C die Parallel-Linie CG ziehet.

VI.

Zweyte Art, ein Rectangel in ein anderes von gegebener Höhe zu verwandeln.

2 Fig.

Das Rectangel ABCD in ein anderes Rectangel BFEG von gegebener Höhe BF zu verwandeln, kann man sich auch einer Methode, die zwar nicht so natürlich, als die itzt angegebene, aber doch bequemer ist, bedienen. Man verlängert die Linie AD, bis sie im Puncte I die Linie FEI, welche man aus dem Puncte F mit AB parallel gezogen, durchschneidet. Alsdenn ziehet man die Diagonal-Linie BI; durch den Punct O aber, wo sie die Seite DC durchschneidet, die Linie GOE mit FB parallel: so wird das Rectangel BFEG dem Rectangel ABCD gleich seyn.

Zum Beweise dessen dürfen wir nur zeigen, daß, wenn man von den zwey Rectangeln ABCD, BFEG, das ihnen gemeinschaftliche Stück OCBG wegnimmt, das Rectangel ADOG dem Rectangel EOCF gleich seyn wird.

Erwäget man nun die Gleichheit der zween Triangel IBF, IBA, so siehet man, daß, wenn von diesen Triangeln gleiche Theile weggenommen werden, die übrig bleibenden Stücke einander gleich seyn müssen. Nun

wird aber aus dem Triangel IAB das Rectangel ADOG, wenn man davon die zween Triangel IDO, OGB abschneidet; und gleicherweise wird aus dem Triangel IBF das Rectangel EOCF, wenn man davon die zween Triangel IEO, OBC wegnimmt, welche den zweenen ersten, IDO und OGB, gleich sind. Folglich müssen die zwey Rectangel ADOG, EOCF, als die Ueberreste der zweenen Triangel IAB, IBF, sowol als die Rectangel ABCD, BFEG, einander gleich seyn.

VII.

Man erweiset nach größter Schärfe, daß, wenn zwey Rectangel einander gleich sind, die Grundlinie des ersten zur Grundlinie des andern sich verhält, wie die Höhe des andern zur Höhe des ersten.

Diese zweyte Art, ein Rectangel in ein anderes zu verwandeln, bestätiget den Grund, welchen die erste als wahr voraus setzet, und welcher auf einer bloßen Folgerung zu beruhen hätte scheinen können.

Wir hatten nämlich aus der Gleichheit der zwey Rectangel ABCD, BFEG, geschlossen, es müßte AB zu BG, wie BF zu BC seyn; und dieses läßt sich nunmehr aus dem vorhergehenden Artikel beweisen.

Denn weil die Triangel IAB und OGB einander nothwendig ähnlich sind, so verhält sich die Grundlinie AB des großen, zur Grundlinie GB des kleinen, wie die Höhe IA zur Höhe OG, oder, welches einerley ist, wie BF zu BC. Folglich muß AB zu GB, wie BF zu BC seyn, so wie wir es im V Artikel zu Grunde gesetzt hatten.

VIII.

VIII.

Auf eben die Weise, wie wir erwiesen haben, daß aus der Gleichheit der zwey Rectangel ABCD, BFEG erfolget, es verhalte sich die Höhe BF zur Höhe BC, wie die Grundlinie AB zur Grundlinie BG, ließe sich auch erweisen, * daß, wenn vier Linien BF, BC, AB, BG, so beschaffen sind, daß die erste zur zweyten, wie die dritte zur vierten ist, das Rectangel, welches zur Höhe und zur Grundlinie die erste und die vierte dieser Linien hat, demjenigen Rectangel gleich ist, welches zur Höhe und zur Grundlinie die zweyte und die dritte derselben Linien hat.

* Wenn vier Linien so beschaffen sind, daß die erste zur zweyten sich verhält, wie die dritte zur vierten, so ist das aus der ersten und aus der vierten Linie errichtete Rectangel gleich demjenigen, welches aus der zweyten und aus der dritten errichtet wird.

IX.

Vier Größen, deren erste zur zweyten sich verhält, wie die dritte zur vierten, machen zusammen eine Proportion.

Wenn vier Größen, so wie die vorigen Linien BF, BC, AB, BG, also beschaffen sind, daß die erste zur zweyten sich verhält, wie die dritte zur vierten, so sagt man, daß diese vier Größen in Proportion stehen, oder, eine Proportion machen. Dahero stehen die Zahlen 6, 9, 18, 27 in Proportion, weil 6 in 9 auf eben die Weise enthalten ist, wie 18 in 27. Eine gleiche Bewandniß hat es auch mit den Zahlen 15, 25, 75, 125 u. s. w.

X.

Von den vier Größen einer Proportion werden die erste und die vierte die äußersten Glieder, die zweyte und die dritte aber die mittleren Glieder genennt.

Von den vier Größen einer Proportion werden die erste und die vierte die äußersten Glieder, die zweyte und die dritte aber die mittleren Glieder genennt.

Bedienet man sich der vorherstehenden Erklärungen, so wird daraus klar, daß die im VII und VIII Artikel enthaltenen Sätze folgendermaßen ausgedrückt werden können.

In einer Proportion ist das Product der äusserſten Glieder gleich dem Producte der mittleren Glieder.

XI.

Wenn vier Größen eine Proportion machen, so ist das Product der äußersten Glieder gleich dem Producte der mittleren.

Wenn das Product der äusserſten Glieder dem Producte der mittleren gleich ist, so machen diese vier Glieder eine Proportion.

XII.

Wenn vier Größen also beschaffen sind, daß das Product der äußersten Glieder dem Producte der mittleren gleich ist, so machen diese vier Größen eine Proportion.

XIII.

Die zween vorherstehenden Artikel sind einer ganz besondern Aufmerksamkeit werth, indem sie von größter Nutzbarkeit sind. Es ergiebt sich unter andern hieraus der Beweis der so genannten Regel Detri in der Rechenkunst. Wir wollen, um einen Begriff von dieser Regel mitzutheilen, ein Exempel geben: denn dies ist die natürlichste Art, sich deutlich zu machen.

Hieraus wird die Regel Detri hergeleitet; oder die Art, das vierte Glied einer Proportion zu finden, deren drey erste Glieder gegeben sind.

Man setze, es hätten 24 Arbeiter in einer gewissen Zeit an einem Baue ein Stück von 30 Ruthen lang verfertiget. Es wird gefragt, wie viel Ruthen lang 64 Arbeiter in einer gleichen Zeit daran verfertigen werden.

Es

Es ist deutlich zu sehen, daß man, um diese Aufgabe aufzulösen, eine Zahl finden muß, die sich zu 64 eben so verhält, wie 30 zu 24. Nun wird, zufolge dessen, was wir bereits gezeigt haben, diese Zahl so beschaffen seyn, daß ihr Product durch 24 dem Producte von 30 durch 64 gleich ist. Es ist aber das Product von 30 durch 64 die Zahl 1920. Dahero wird die gesuchte Zahl diejenige seyn, welche, durch 24 multipliciret, 1920 giebt. Nun bemerket man alsobald, wenn man nur einige Begriffe von der Rechenkunst hat, daß diese Zahl der Quotient von 1920, durch 24 dividiret, nämlich 80 seyn müsse.

Ueberhaupt, wenn man das vierte Glied einer Proportion finden will, deren drey erste Glieder gegeben sind, muß man das Product aus dem zweyten und dritten Gliede nehmen, und solches durch das erste Glied der Proportion dividiren.

XIV.

Ein so einfaches Exempel, wie wir itzo erkieset haben, wird vielleicht die Nothwendigkeit der gegebenen Methode nicht sattsam zu erkennen geben. Der natürliche Verstand allein würde die gesuchte Zahl finden lehren. Denn man siehet, daß 30 um ein Viertel größer, als 24 ist, und daß folglich die gesuchte Zahl auch um ein Viertel größer, als 64 seyn muß, welches 80 giebt. Allein, es giebt Fälle, wo das Verhältniß der zwo ersten Zahlen

len der Proportion weit schwerer zu finden wäre.

Zum Exempel, man verlanget das vierte Proportional-Glied zu den drey Zahlen 259, 407, 483.

Diese Zahl nach der gegebenen Methode zu finden, multipliciret man 483 durch 407, und dividiret 196581, als das Product beyder Zahlen, durch 259; wodurch man zum gesucheten vierten Proportional-Gliede die Zahl 759 bekommt.

Hätte man, um dieses vierte Glied zu finden, es auf andere Art angreifen wollen, so hätte es nur durch Versuchen geschehen können. Man würde, zum Exempel, wohl haben herausbringen können, daß 148, als der Ueberschuß der Zahl 407, über 259, vier siebende Theile von 259 enthält, und daß man folglich auch zu 483 die Zahl 276, welche vier von ihren siebenden Theilen enthält, hätte hinzu thun müssen. Allein, das Allgemeine und die Gewißheit der angegebenen Methode ersparet uns allezeit die Verwirrung des bloßen Versuchens, welches, auch überdieß in vielen Fällen vergeblich seyn würde.

XV.

Wenn man zwey Quadrate zusammen zu setzen hat, so geschieht solches auf eben die Art, wie bey zwey Rectangeln, immaßen die Quadrate nichts anders sind, als Rectangel, deren Höhe und Grundlinie einander gleich sind.

Man

Man verwandelt dahero eines der Quadrate, zum Exempel das kleineste, in ein Rectangel, dessen Höhe die Seite des größeren ist, so machen die zwey Quadrate nur ein Rectangel. Gleichergestalt könnte man die Höhe des kleineren Quadrates allen beyden geben, oder auch eine andere beliebige Höhe. Was man sich aber am meisten vorsetzen mußte, als man auf solche Weise zwey Quadrate in eine einzige Figur bringen wollte, war, ein Quadrat zu machen, welches zwey anderen gleich wäre. Zu dieser Aufgabe war es nicht schwer, die folgende Auflösung zu finden.

XVI.

Man setze anfangs, es wären die zwey Quadrate ABCD, CBFE, aus welchen man ein einziges Quadrat machen will, einander gleich, so ist leicht zu bemerken, daß, wenn man die Diagonal-Linien AC und CF ziehet, die Triangel ABC und CBF, zusammen genommen, der Inhalt eines der beyden Quadrate seyn werden. Wenn man nun unter der Linie AF die zween anderen Triangel DCA und CEF ansetzet, so bekommt man das Quadrat ACFG, dessen Seite AC die Diagonal-Linie des Quadrats ABCD ist, und dessen Inhalt den zwey gegebenen Quadraten gleich seyn wird; welches keines Beweises bedarf.

3 Fig. Ein Quadrat zu machen, welches doppelt so groß, als ein anderes ist.

XVII.

XVII.

Nunmehr setze man, es sollte ein Quadrat gemacht werden, welches dem Inhalte zweyer Quadrate von ungleicher Größe, ADCd, CFEf, gleich wäre; oder welches einerley ist, man wollte die Figur ADFEfd in *ein* Quadrat verwandeln.

4 Fig. Ein Quadrat zu machen, welches zweyen anderen, zusammen genommen, gleich ist.

Man untersuchet, nach Anleitung der itzt gegebenen Methode, ob es nicht möglich sey, in der Linie DF einen gewissen Punct H zu finden, welcher so beschaffen sey:

1) Daß, wenn man die Linien AH und HE ziehet, und die Triangel ADH und EFH um die Puncte A und E drehet, bis sie die Lagen Adh, Efh bekommen, dieselben zween Triangel im Puncte h zusammen stoßen.

2) Daß die vier Seiten AH, HE, Eh, hA, von gleicher Länge und mit einander perpendicular werden.

Nun findet man aber diesen Punct H, wenn man DH gleich macht der Seite CF, oder EF. Denn aus dieser vorausgesetzten Gleichheit zwischen DH und CF erfolget erstlich, daß, wenn sich der Triangel ADH um seinen Winkel A drehet, so daß er die Lage Adh bekommt, der Punct H, nachdem er in h gekommen, von dem Puncte C in der Weite der Linie DF abstehen wird.

Aus eben derselben vorausgesetzten Gleichheit zwischen DH und CF erfolget ferner, daß HF gleich seyn wird DC; und daß dahero, wenn sich der Triangel EFH um den Punct E drehet,

drehet, und in die Lage E f h kömmt, der Punct H ebenfalls in den Punct h, welcher von C in der Weite der Linie D F absteher, eintreffen wird.

Folglich wird die Figur ADFEfd in eine Figur von vier Seiten A H E h verwandelt seyn. Es bleibt also nur noch übrig, zu untersuchen, ob ihre vier Seiten von gleicher Länge sind, und senkrecht auf einander stehen.

Nun ist die Gleichheit dieser vier Seiten offenbar, weil Ah und hE keine anderen, als A H und H E selbst sind, welche zwo letzten nothwendig einander gleich seyn müssen, weil DH gleich ist CF, oder FE, und folglich die zween Triangel A D H und H E F einander gleich und ähnlich sind. *

Man hat also nur noch zu untersuchen, ob die Seiten der Figur AHEh rechte Winkel mit einander machen. Hiervon nun wird man leicht überzeugt werden, wenn man bemerket, daß, indem HAD sich um den Punct A drehet, und

* Nicht bloß, weil die Seite DH der Seite FE gleich ist, sondern vielmehr, weil auch die Seiten AD und HF, und die zwischen DH und AD, sowol als zwischen HF und FE liegende Winkel, D und F, einander gleich sind, müssen die zween Triangel ADH, HEF, (I Th. XXVIII Art.) einander gleich und ähnlich seyn; welches der Herr Verfasser der Kürze wegen ausgelassen zu haben scheinet.

und nach hAd kömmt, die Seite AH nothwendig eben dieselbe Bewegung machen muß, wie die Seite AD. Nun macht aber die Seite AD, indem sie Ad wird, einen rechten Winkel DAd: folglich wird auch die Seite AH, indem sie Ah wird, einen rechten Winkel HAh machen * müssen.

Betreffend die übrigen Winkel, H, E, h, so ist unläugbar, daß es nothwendig rechte Winkel seyn müssen. Denn eine Figur von vier gleichen Seiten kann unmöglich einen rechten Winkel haben, wenn nicht die anderen alle rechte Winkel sind.

XVIII.

Wenn man bemerket, daß von den zwey Quadraten ADCd, CFEf, eines auf AD, der mittleren Seite des Triangels ADH, das andere aber auf EF, welche Linie der Seite DH, als der kleinesten Seite desselben Triangels

* Wenn dieser Beweis des Herrn Verfassers, daß der Winkel HAh ein rechter Winkel seyn muß, dem Leser undeutlich ist, so betrachte er den Winkel DAH, welcher, nach der vorausgesetzten Bedingung, (daß sich der Triangel ADH nach Adh drehen soll,) von dem rechten Winkel DAd erst abgeschnitten, und hernach in dAh wieder angesetzet wird; daß folglich das vorhin übrig gebliebene Stück HAd des rechten Winkels DAd eben dasselbe wieder bekömmt, was es verlohren hatte, das heißt, daß HAh wieder ein rechter Winkel seyn muß.

gels ADH, gleich ist, errichtet worden; daß ferner das Quadrat AHEh, welches den zwey anderen gleich ist, auf eben desselben Triangels größter Seite AH, der sogenannten Hypothenuse des rechtwinkelichten Triangels, beschrieben ist: so entdecket man leichtlich die so berühmte Eigenschaft des rechtwinkelichten Triangels, daß das Quadrat seiner größten Seite den Quadraten seiner zwo anderen Seiten im Inhalte gleich ist.

Die Hypothenuse des rechtwinkelichten Triangels ist dessen größte Seite.

Und das Quadrat dieser größten Seite ist den Quadraten der zwo übrigen Seiten gleich.

XIX.

Wenn man dahero aus zwey Quadraten HDKL, ABCD, eines machen will, so hat man nicht nöthig, sie erst neben einander zu setzen und zu zerstücken, wie wir im XVII Artikel gethan haben. Man darf nur ihre Seiten AD, DH, dergestalt setzen, daß sie einen rechten Winkel zusammen machen, und hernach die Linie AH ziehen: so ist alsdenn diese Linie die Seite des gesuchten Quadrates AHIE.

5 u. 6 Fig.

Hieraus ergiebt sich eine ganz einfache Art, zwey Quadrate in eines zu bringen.

7 Fig.

XX.

Hätte man zwo ähnliche Figuren, DAFGM, DHPON, und man wollte daraus eine dritte machen, deren Fläche den zwo ersten zusammen gleich wäre, so darf man nur die Grundlinien AD und HD dieser Figuren auf die zwo Seiten eines rechten Winkels ADH tragen: so giebt die größte Seite AH des alsdenn geschlossenen Triangels ADH die Grundlinie der verlangten Figur.

8 u. 9 Fig.

10 Fig.

Wenn die Seiten eines rechtwinkelichten Triangels drey ähnlichen Figuren zu Grundlinien dienen, so ist diejenige Figur, die auf

der größten Seite beschrieben wird, den beyden anderen Figuren gleich.

Die Ursache davon einzusehen, stelle man sich die Quadrate ABCD, DHKL, AHIE vor, welche auf den Grundlinien dreyer ähnlicher Figuren beschrieben würden: so erkennet man alsobald (nach dem XVIII Art.) daß das Quadrat AHIE allein so groß im Inhalte seyn wird, als die beyden übrigen Quadrate ABCD, DHKL. Nun verhalten sich aber ähnliche Figuren unter einander, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten; (I Th. XLVII Art.) Folglich werden die drey Quadrate ABCD, DHKL, AHIE, einerley Theile der Figuren DAFGM, DHPON, AHQRS seyn.

Hieraus ist leicht zu schließen, daß die Figur AHQRS so groß im Inhalte, als die zwo übrigen seyn wird. Zum Exempel, man setze, es sey jegliches dieser Quadrate die Hälfte derjenigen Figur, von welcher es umgeben wird, so würde kein Mensch zweifeln, daß nicht die Figur AHQRS den zwo übrigen gleich sey, weil ihre Hälfte allein so groß, als die Hälften der zwo Figuren DHPON, DAFGM, wäre. Eine gleiche Bewandniß hat es auch, wenn die Quadrate ABCD, DHKL, AHIE, zwey Drittel, drey Viertel u. s. w. der Figuren DAFGM, DHPON, AHQRS wären.

XXI.

Viel ähnliche Figuren

Verlangte man drey, vier und mehr ähnliche Figuren, oder, welches einerley ist, drey, vier

vier und mehr Quadrate in eines zu bringen, so bediente man sich doch eben derselben Methode. Wollte man, zum Exempel, drey zusammen setzen, so machte man erst ein Quadrat, das so groß, als die zwey ersten wäre; alsdenn fügte man zu dem erhaltenen neuen Quadrate das noch übrige dritte, so bekäme man ein viertes, welches so groß im Inhalte, als die drey gegebenen wäre.

in eine einzige zu bringen.

XXII.

Es erfolget hieraus, daß, wenn man sich vorsetzte, ein Quadrat vier, fünf, sechs und mehrmal größer, als ein anderes zu machen, man nur der gegebenen Methode folgen dürfte, um diese Aufgabe, ja, sogar das Gegentheil derselben aufzulösen, nämlich: ein Quadrat zu machen, das nur der vierte, fünfte, sechste Theil ꝛc. von einem gegebenen wäre. Man erinnerte sich hierbey nur der (im I Th. XLI Art.) gezeigten Art, zu drey gegebenen Linien die vierte Proportional-Linie zu finden. Wir werden aber im dritten Theile dieses Werkes eine mehr unmittelbare und bequemere Methode angeben, dergleichen Aufgaben aufzulösen.

XXIII.

Die Zusammensetzung ähnlicher Figuren giebt einen unumstößlichen Beweis an die Hand, wie nothwendig es sey, die Maaßstäbe beyseite zu setzen, wenn man in Entwer-

fung der Figuren nach gehöriger geometrischer Schärfe verfahren will.

Man setze, zum Exempel, es sollte ein Quadrat doppelt so groß, als ein anderes gemacht werden. Diejenigen, welchen die im XVI Artikel gegebene Methode unbekannt wäre, würden es wahrscheinlicher Weise auf folgende Art angreifen.

Sie würden die Seite des gegebenen Quadrates in eine große Menge gleicher Theile, zum Exempel in 100, eintheilen. Nachdem sie hernach 100 durch 100 multipliciret hätten, so bekämen sie 10000 zum Inhalte des Quadrates, und diese Zahl gäbe 20000 zum Inhalte des neuen Quadrates.

Allein, dieser Inhalt des neuen Quadrates zeigte ihnen keinesweges die Art, es zu beschreiben. Sie hätten noch einer Zahl nöthig, welche ihnen die Länge seiner Seite ausdrückte, und welche so beschaffen wäre, daß, wenn sie durch sich selbst multipliciret, das heißt, quadriret würde, ihr Product 20000 gäbe.

Wenn eine Zahl durch sich selbst multipliciret wird, so ist das Product, welches heraus kömmt, das Quadrat derselben Zahl.

Es würde aber vergebens seyn, diese benöthigte Zahl auf einem Maaßstabe zu suchen, dessen Theile Hunderttheile des ersten gegebenen Quadrates wären. Denn 141 durch sich selbst multipliciret, gäbe ihnen 19881, und 142 gäbe 20164; und beyde Zahlen kämen mit derjenigen, die man finden sollte, nicht überein.

Vielleicht würden sie glauben, daß, wenn man die Seite des gegebenen Quadrates in mehr,

mehr, als 100 Theile eintheilete, man eine bestimmte Anzahl solcher Theile zur Seite des zu beschreibenden doppelt großen Quadrates finden müßte. Allein, ungeachtet aller Versuche, so sie anstellen könnten, würden sie dennoch finden, daß es vergebens wäre, zwo Zahlen zu suchen, deren eine die Seite, oder, nach der gewöhnlichen Redensart, die Wurzel des Quadrates, (Quadrat-Wurzel) die andere aber die Seite, oder, die Wurzel des doppelt großen Quadrates, ausdrückte.

Die Wurzel eines Quadrates ist diejenige Zahl, die durch sich selbst multipliciret, das Quadrat giebt.

XXIV.

Und in der That wird in der Rechenkunst bewiesen, daß, wenn von zwo Zahlen eine nicht das Vielfache der andern ist, das heißt, wenn sie nicht gewissemal völlig in der andern enthalten ist, das Quadrat der kleineren auch nicht gewissemal völlig in dem Quadrate der größeren enthalten seyn kann. Zum Exempel, weil 5 sich nicht durch 4 dividiren läßt, so daß es aufgienge, so kann auch 25, das Quadrat von 5, nicht durch 16, das Quadrat von 4, dividiret werden.

Eine Zahl ist das Vielfache einer andern, wenn sie dieselbe gewissemal völlig enthält.

Wenn man dahero zwo Zahlen quadriret, deren eine zwar größer, als die andere, aber doch kleiner, als das Doppelte derselben ist, so entstehen daraus zwo andere Zahlen, deren eine kleiner, als das Vielfache der andern ist, aber doch weder das Doppelte, noch das Dreyfache derselben seyn kann. Folglich mag man die Seite eines Quadrates in so viel

Theile theilen, als man will, so wird dennoch die Seite des doppelt großen Quadrates, welche, vermöge dessen, was im XVI Artikel erwiesen worden, die Diagonal-Linie des ersten Quadrates ist, keine völlige Zahl solcher Theile enthalten; welches in der Geometrie also ausgedrücket wird: Die Seite eines Quadrates, und seine Diagonal-Linie, sind incommensurabel.

Die Seite eines Quadrates, und seine Diagonal-Linie, sind incommensurabel.

XXV.

Andere incommensurable Linien.

Man kann ferner anmerken, daß es noch viel andere Linien giebt, die ebenfalls kein gemeinschaftliches Maaß haben. Denn man schreibe folgende zwo Reihen Zahlen,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, u. s. w.
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, u. s. w.

deren erste die natürlichen Zahlen, die zweyte aber ihre Quadrate darstellet, so wird man sehen, daß, wie die Zahlen, welche zwischen 4 und 9, zwischen 9 und 16, zwischen 16 und 25 sind, u. s. w. keine Wurzeln haben, also auch die Seiten zweyer Quadrate, deren eines das Dreyfache, das Fünffache, das Sechsfache ist, u. s. w. kein gemeinschaftliches Maaß haben können.

XXVI.

Nun könnte man in Betrachtung dessen, daß viele Linien incommensurabel mit andern sind, vielleicht den Zweifel hegen: ob diejenigen Sätze, deren wir uns bedienet haben, das gleiche Verhältniß ähnlicher Figuren zu beweisen,

weisen, ihre Richtigkeit haben. Man hat gesehen, daß wir, bey Vergleichung dieser Figuren, (I Th. XXXIV u. f. Art.) allezeit voraussetzten, daß sie einen gemeinschaftlichen Maaßstab hätten, welcher zu Ausmessung aller ihrer Theile dienen könnte; dahero es das Ansehen gewinnet, als ob dieser vorausgesetzte Satz, vermöge desjenigen, was wir zuletzt gesagt haben, einer Einschränkung benöthiget wäre. Wir müssen also wieder auf das Vorige kommen, und untersuchen, ob unsere Sätze, wenn sie wahr seyn sollen, nicht selbst einiger Mäßigung bedürfen.

XXVII.

Wir wiederholen zuerst dasjenige, was im XXXIX Artikel des I Theiles gesagt worden, und untersuchen, ob es nach der Schärfe wahr sey, daß solche Triangel, wie abc, ABC, deren Winkel einander gleich sind, proportionale Seiten haben. 11 u. 12 Fig. Zum Exempel, wenn wir annehmen, es sey die Grundlinie des ersten ab, und des zweyten seine die Linie AB, welche gleich sey der Diagonal-Linie eines Quadrates, dessen Seite ab ist: so lasse man uns nachforschen, ob unter dieser Bedingung zwischen AC und ac eben dasselbe Verhältniß, wie zwischen AB und ab seyn könne.

Obgleich, zufolge dessen, was wir gezeiget haben, so groß auch die Anzahl der in ab nach Willkühr angenommenen Theile seyn könnte, AB keinesweges eine völlige Zahl solcher Theile

halten würde, so ist es doch leicht wahrzunehmen, daß, je größer die Zahl wäre, desto genauer AB mit den Theilen von ab gemessen werden könnte. Man setze, es werde ab in 100 Theile getheilet, so wird die Zahl dessen, was AB von solchen Theilen hält, zwischen 141 und 142 fallen; (XXIII Art.) Nun begnüge man sich mit 141, und lasse den kleinen Ueberrest aus der Acht: so ist klar, daß (I Th. XXXIX Art.) AC ebenfalls 141 von den Theilen ac halten wird.

Man setze ferner, es werde ab in 1000 Theile getheilet, so wird die Zahl dessen, was AB von solchen Theilen hält, zwischen 1414 und 1415 fallen. Man nehme deren nur 1414, und lasse wiederum den Ueberrest aus der Acht: so wird abermals erhellen, daß AC 1414 solche tausende Theile von ac halten wird; und überhaupt, daß AC jedesmal eben so viel Theile von ac mit einem kleinen Ueberreste halten wird, als AB Theile von ab mit einem Ueberreste hält.

Ueberdieß werden diese Ueberreste, wie man bemerket, von beyden Seiten um so viel kleiner, je größer die Anzahl der Theile von ab wird. Man kann sie dahero gänzlich aus der Acht lassen, wenn man sich eine unendliche Eintheilung der Linie ab gedenket. Folglich kann man alsdenn sagen, daß die Zahl der Theile von ac, welche auf AC gehen, gleich sey der Zahl der Theile von ab, welche auf AB gehen, und daß also AC zu ac sich verhalte, wie AB zu ab.

Wir

Wir haben dahero nach der Schärfe erwiesen, daß, wenn zween Triangel einerley Winkel haben, ihre Seiten proportional sind, es sey nun, daß ihre Seiten ein gemeinschaftliches Maaß haben, oder nicht. Aehnliche Triangel und Figuren haben proportionale Seiten, auch alsdenn, wenn ihre Seiten incommensurabel sind.

Der Satz, (I Th. XLV Art.) aus welchem das gleiche Verhältniß derer in ähnlichen Figuren ähnlich liegenden Linien hergeleitet wird, könnte auf eine gleiche Weise bestätiget werden.

XXVIII.

Durch dergleichen Art zu schließen wird man befinden, daß die im XLIV und im XLVII Artikel des I Theiles erklärten Säze, wo man gezeigt hat, daß die Flächen ähnlicher Triangel und Figuren eben dieselbe Proportion unter einander haben, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, allezeit überhaupt wahr sind, sogar alsdenn, wenn die Seiten dieser Figuren incommensurabel sind. Aehnliche Figuren verhalten sich unter einander, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Ein Exempel davon sollen uns die ähnlichen Triangel ABC, abc, geben, von welchen wir voraussezen, daß ihre Höhen mit ihren Grundlinien incommensurabel sind. In diesem Falle ist kein Quadrat zu finden, so klein es auch seyn möge, das diesen Triangeln, und denen auf ihren Grundlinien beschriebenen Quadraten, zum gemeinschaftlichen Maaße dienen könnte, das heißt: Die Flächen abc und abde sind unter einander incommensurabel, sowol als die Flächen ABC und ABDE; aber demungeachtet bleibt es doch wahr, daß der Triangel

angel ABC sich zum Quadrate ABDE verhalten wird, wie der Triangel abc zum Quadrate abde.

Hiervon überzeuget zu werden, wird man bemerken, daß, je kleiner die Theile des Maaßstabes, dessen man sich, um AB und CK zu messen, bedient, vorausgesetzt werden, desto näher man auch den Zahlen, die das Verhältniß zwischen ABC und ABDE ausdrücken, beykommen werde. Wenn man dahero den Maaßstab des Triangels abc beständig in eben dieselbe Anzahl Theile eintheilet, und dabey die kleinen Ueberreste nicht in Betrachtung ziehet, so wird man finden, daß einerley Zahlen allezeit dienen werden, das Verhältniß des Triangels ABC zum Quadrate ABDE, und des Triangels abc zum Quadrate abde auszudrücken. Nun treibe man in den Gedanken die Eintheilung des Maaßstabes bis ins Unendliche, so werden die Ueberreste schlechterdings verschwinden; und man wird sagen können, daß diejenigen Zahlen, die das Verhältniß des Triangels abc zum Quadrate abde ausdrücken, auch das Verhältniß des Triangels ABC zum Quadrate ABDE ausdrücken; und daß folglich der Triangel abc sich zum Quadrate abde verhält, wie der Triangel ABC zum Quadrate ABDE. Ein gleiches gilt auch von allen anderen ähnlichen Figuren.

Anfangs-

Anfangsgründe der Geometrie.

Dritter Theil.

Von dem Maaße der Circulförmigen Figuren, und von deren Eigenschaften.

Nachdem man zur Ausmessung aller geradlinichten Figuren gelanget war, so hat man die Art gesuchet, auch diejenigen Figuren zu bestimmen, welche von krummen Linien umschlossen werden. Denn die Felder, und überhaupt die Plätze, deren Maaß man zu finden begehret, sind nicht allezeit mit geraden Linien umgrenzet.

So.

Sowol die krummlinichten, als auch die vermischten Figuren, ich meyne diejenigen, welche in gerade und in krumme Linien eingeschlossen sind, können oft, wie wir bereits gesagt haben, in ganz geradlinichte Figuren gebracht werden. Denn, hätte man eine Figur,
VIII Taf. I Fig.
wie ABCDEFG, auszumessen, so könnte man die Seite AD als eine Zusammensetzung von zwo, von drey und mehr geraden Linien ansehen; und wenn man sodann anstatt der krummen Linie FED die gerade FD annähme, so bekäme man die geradlinichte Figur ABCDFG, welche von der vermischten so wenig unterschieden wäre, daß man, ohne einen merklichen Irrthum zu begehen, eine für die andere annehmen könnte.

Man würde dahero an diesen Figuren nach Anleitung der vorhergehenden Methoden arbeiten. Allein, die Geometriekundigen sind mit dergleichen Arten zu arbeiten selten vergnügt; sie verlangen nur solche, wo nach der Schärfe verfahren wird. Ueberdieß kömmt auch mancher Fall vor, wo die Verwandelung einer krummlinichten, oder auch einer vermischten Figur, in eine geradlinichte, erfordern würde, ihren Umfang in eine so große Anzahl Theile zu theilen, daß die gemeine Methode nicht in Ausübung zu bringen wäre; ja, man würde auch wenig Lust haben, sie anzuwenden, wenn man einen Platz, wie Z ist, (7 Fig.) oder den ganzen Circul X, (3 Fig.) zu messen hätte; und man würde vielmehr

einen

einen andern Weg suchen müssen, um das Maaß solcher Plätze zu bekommen. Hier werden wir nur diejenigen abhandeln, deren Umfang Circulbogen in sich schließet.

I.

Man setze zuerst, es solle die Fläche des Circuls X gemessen werden. Man beobachte, daß, wenn ein reguläres Vieleck BCDE ꝛc. in ihm beschrieben wird, selbiges dem Circul um so viel mehr gleichen wird, je mehr es Seiten hat. Nun hat man gesehen, daß die Fläche des Vieleckes, (I Th. XXII Art.) gleich ist dem so vielmal genommenen Producte der Seite BC, durch die Hälfte des Apothema AH, als das Vieleck Seiten hat, oder, welches einerley ist, daß dessen Fläche zum Maaße hat das Product des ganzen Umfanges BCDE ꝛc. durch die Hälfte des Apothema. Weil nun, wenn man die Anzahl der Seiten des Vieleckes unendlich vermehret, seine Fläche, sein Umfang, sein Apothema, gleich werden der Fläche, dem Umkreise, und dem Strahle (radio) des Circuls: so ist der Inhalt des Circuls das Product seines Umkreises durch die Hälfte seines Strahles. 3 Fig.

Der Inhalt des Circuls ist das Product seines Umkreises durch die Hälfte seines Strahles.

II.

Es erfolget hieraus, daß die Fläche eines Circuls BCD der Fläche eines Triangels ABL gleichet, dessen Höhe der Strahl AB, die Grundlinie aber eine gerade Linie BL ist, welche mit dem Umkreise gleiche Länge hat. 4 Fig.

Die Fläche des Circuls ist einem Triangel gleich, dessen Höhe der Strahl, und die Grund-

III.

III.

linie eine gerade Linie ist, die mit dem Umkreise einerley Länge hat.

Man darf folglich nur die Länge des Strahles und des Umkreises wissen. Was den Strahl anlanget, so ist selbiger leicht zu messen; aber ganz anders verhält es sich mit dem Umkreise. Indessen ist es bey vielen Gelegenheiten in der Ausübung genug, wenn man den Circul, um die Länge seines Umkreises zu bekommen, mit einem Faden umgiebt.

Aber bis itzo hat man es nicht so weit bringen können, den Umkreis des Circuls geometrisch zu messen, das heißt, sein richtiges Verhältniß mit dem Strahle zu bestimmen. Man findet solches bis auf Hundert- tausend- und Millionen-Theilchen; ja, man nähert sich ihm, so sehr man selbst will, ohne jedoch es nach der Schärfe bestimmen zu können.

IV.

Wenn der Diameter eines Circuls 7 Theile hat, so hält der Umkreis deren beynahe 22.

Das einfacheste Verhältniß, welches dem wahren einigermaßen beykommt, ist dasjenige, welches schon Archimedes gefunden hat. Wenn der Durchmesser 7 Theile hat, so ist die Zahl dessen, was der Umkreis von eben diesen Theilen hält, zwischen 21 und 22; doch nähert sie sich 22 viel mehr, als 21.

V.

Uebrigens ist klar zu sehen, daß, wenn man das Verhältniß eines einzigen Umkreises zu seinem Strahle wüßte, man auch das Verhält-

hältniß aller anderen Umkreise zu ihren Strahlen wissen würde, weil solches in allen Circuln nothwendig einerley seyn muß. Es ist dieser Satz so einfach, daß er nicht nöthig hat, erwiesen zu werden, weil man einsiehet, daß, was man auch immer hätte thun können, um vermittelst der Theile des Strahles den Umkreis auszumessen, man selbiges nothwendig von neuem thun müßte, um irgend einen andern Umkreis zu messen; so daß man jedesmal eben dieselbe Anzahl der Theile des Strahles bekommen müßte.

Die Umkreise der Circul verhalten sich unter einander, wie ihre Diameter, oder wie ihre Strahlen.

VI.

Es erhellet deutlich, daß auch die Circul diese allgemeine Eigenschaft aller ähnlichen Figuren haben, (I Th. XLVII Art.) daß ihre Flächen ein gleiches Verhältniß unter einander haben, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. Weil man aber, um diesen Satz auf die Circul zu deuten, keine Seiten an ihnen nehmen kann, so muß man sich ihrer Strahlen bedienen; und man wird befinden, daß die Flächen der Circul mit den Quadraten ihrer Strahlen proportional sind.

Die Flächen der Circul sind mit den Quadraten ihrer Strahlen proportional.

Wenn es, dem ersten Ansehen nach, scheinen möchte, als folgte dieser Satz nicht aus demjenigen, was oben im XLVII Artikel des I Theiles gezeigt worden, und man wollte einen eigenen Beweis davon haben, so dürfte man nur erwägen, daß es völlig einerley ist, ob man die Flächen der zween Circul BCD, EFG, 4 u. 5 Fig.

EFG, oder die Flächen der Triangel ABL, AEM, mit einander vergleichet, immaßen diese den ersten (II Art.) gleich sind, wofern man annimmt, daß ihre Grundlinie, BL und EM, die in gerade Linien ausgebreitete Umkreise BCD und EFG, ihre Höhen aber die Strahlen AB und AE sind. Nun werden aber, nach dem vorhergehenden Artikel, diese Triangel einander ähnlich seyn: folglich stehen ihre Flächen in gleichem Verhältnisse, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten AB, AE, welche nichts anders sind, als die Strahlen der Circul BCD und EFG. Folglich sind auch die Flächen dieser Circul mit den Quadraten ihrer Strahlen proportional.

VII.

Von drey Circuln, deren Strahlen die drey Seiten eines rechtwinkelichten Triangels sind, ist derjenige Circul, welchen die Hypothenuse giebt, so groß im Inhalte, als die zween anderen zusammen.

Weil alle Circul einander ähnlich sind, so haben sie auch, wie andere ähnliche Figuren, diese Eigenschaft an sich, daß, wenn man die drey Seiten eines rechtwinkelichten Triangels zu Strahlen annimmt, und drey Circul damit beschreibet, derjenige Circul, dessen Strahl die größte Seite des rechtwinkelichten Triangels ist, den beyden anderen Circuln zusammen gleich ist.

Dahero kann man allezeit einen Circul finden, welcher zweenen anderen gegebenen gleich ist, und zwar, ohne sich die Mühe zu geben, einen jedweden zu messen. Verlangte man, zum Exempel, ein Wasserbehältniß zu einem Springbrunnen, welches in einerley Tiefe so

viel Wasser, als zwey andere fassen könnte; oder, man wollte die Weite einer Brunnenröhre finden, wodurch so viel Wasser, als durch zwo andere von gegebener Weite, liefe: so würde man solches, nach der itzt angezeigten Methode, leichtlich ins Werk richten.

VIII.

Hätte man die Fläche eines Ringes V* auszumessen, welches ein Raum ist, der von zweenen concentrischen Circuln EFG, BCD, eingeschlossen ist, das heißt, von solchen Circuln, welche einerley Mittelpunct haben; so müßte man, wie man alsobald einsiehet, die Flächen beyder Circul, jedweden besonders messen, und den Inhalt des kleineren von dem Inhalte des größeren abziehen. Es ist aber auch leicht zu bemerken, daß diese Aufgabe auf eine für die Ausübung weit leichtere Art aufgelöset werden kann.

6 Fig. Ein Ring ist der Raum, welchen zween concentrische Circul einschließen.

Man bilde sich einen Triangel ABL ein, dessen Höhe der Strahl AB sey, und dessen Grundlinie BL eine gleiche Länge mit dem Umkreise BCD habe. Ziehet man aus dem Puncte E die Linie EM parallel mit BL, so ist dieselbe dem Umkreise EFG gleich. Denn wegen der Aehnlichkeit der Triangel AEM, ABL ist zwischen AB und BL eben dasselbe Verhältniß, wie zwischen AE und EM. Nun ist aber, wie vorausgesetzt wird, BL gleich dem

* Diese Figur wird zuweilen eine Krone genennt.

dem Umkreise, dessen Strahl AB ist. Folglich wird EM ebenfalls gleich seyn dem Umkreise, dessen Strahl die Linie AE, ein Theil von AB, ist. Ein gleiches gilt auch von einer jedweden andern Linie, KI, die mit BL parallel ist: sie ist allezeit gleich dem Umkreise, dessen Strahl AK, ein Theil der Linie AB, ist.

Aus der vorausgesetzten Gleichheit zwischen dem Umkreise EFG und der Linie EM erfolget nothwendig die Gleichheit des Triangels AEM mit dem Circul EFG: folglich muß der geradlinichte Raum EBLM dem gegebenen Ringe V gleich seyn. Es kann aber dieser Raum EBLM leichtlich in ein Rectangel EBPH verwandelt werden, wenn man ML in zwey gleiche Theile, MI und IL, theilet, und auf BL, durch den Punct I, den Perpendicul HIP aufrichtet, welcher den angesetzten Triangel MHI, dem abgeschnittenen, PLI, gleich macht.

Folglich, wenn man durch den Punct I mit BL die Parallel-Linie IK ziehet, durch welche EB in zwey gleiche Theile getheilet wird, hat der gegebene Ring, welcher dem Raume EBLM oder EBPH gleich ist, zu seinem Maaße das Product von EB durch KI, Länge des Umkreises, dessen Strahl AK ist.

Der Inhalt eines Ringes wird gefunden, wenn man seine Breite durch seinen mittleren

Folglich wird zur Ausmessung eines Ringes V erfordert, desselben Breite EB durch den Umkreis KOQ, welcher der mittlere Umkreis zwischen den beyden andern Umkreisen BCD und EFG genennt wird, zu multipli-

pliciren, weil derselbe den kleineren Umkreis EFG, oder die gerade Linie, EM, um die Länge MH, welche PL gleich ist, übertrifft, und um eben dieselbe Länge von dem größeren Umkreise BCD, oder von der geraden Linie BL, übertroffen wird. Umkreis multipliciret.

IX.

Wenn eine Figur, wie Y, bestehend aus unterschiedenen Circulbögen und aus geraden Linien, gemessen werden soll; oder auch eine Figur, wie Z, die bloß aus Circulbögen zusammengesetzet ist, so kömmt die Schwierigkeit allein darauf an, den Abschnitt (Segmentum) eines Circuls zu messen, das heißt, einen Raum, wie ABCE*, welcher von einem Bogen ABC, und von einer Sehne AC eingeschlossen wird. Denn diejenigen Figuren, die ganz aus Circulbögen, oder auch aus Bögen und geraden Linien zusammengesetzet sind, können als geradlinichte Figuren betrachtet werden, welche mit gewissen Circul-Abschnitten vermehret oder vermindert sind.

2 Fig.

7 Fig.

Ein Circul-Abschnitt ist ein Raum, welcher von einem Circulbogen und von einer Sehne eingeschlossen wird.

* Fig.

Die Ausmessung aller Circulförmigen Figuren kömmt auf das Maaß des Abschnittes an.

X.

Das Maaß eines jeden Abschnittes, ABCE, ist leicht zu finden, wenn man das Maaß des Circuls weiß. Denn man ziehe von den Endpuncten der Sehne AC, nach dem Mittelpunct T des Bogens, die Linien AT, CT, so ergiebt sich eine Figur ABCT, welche der Ausschnitt (Sector) genennt wird, deren Fläche

8 Fig.

Ein Circul-Ausschnitt ist ein Stück

des Circuls, welches von zweenen Strahlen, und von dem dazwischen befindlichen Bogen eingeschlossen wird.

sich zum Circul, wie der Bogen ABC zum ganzen Umkreise, verhält, und deren Maaß folglich das Product aus der Hälfte des Strahles AT, durch den Bogen ABC, seyn wird. Nachdem nun der Inhalt des Ausschnittes bestimmet ist, so darf man nur den Triangel ACT davon abziehen, um den Inhalt des Abschnittes ABCE zu bekommen.

Wie der Inhalt des Ausschnittes und des Abschnittes gefunden wird. 2 Fig.

XI.

Weil man, wenn eine Figur, wie Y, ausgemessen werden soll, ofmals nicht weiß, wo des Bogens HIK Mittelpunct ist, und man gleichwohl ohne diesen Mittelpunct die Figur nicht ausmessen kann, (immaßen die vorhergehende Methode voraussetzet, daß man den Strahl dieses Bogens wisse,) so ist nöthig, den Mittelpunct eines jeden Bogens finden zu lernen.

Den Mittelpunct eines jeden Circulbogens zu finden. * 9 Fig.

Es sey ABC * der gegebene Circulbogen. Wenn man in diesem Bogen nach Belieben zween Puncte A und B wählet, und daraus, als aus Mittelpuncten, die vier Bögen goi, foh, lpk, mpn beschreibet, und zwar die zween ersten mit einer beliebigen Oeffnung des Zirkels, die zween letzten aber entweder mit eben derselben, oder auch mit einer andern willkührlichen Oeffnung; so ist klar, daß der gesuchte Mittelpunct des Bogens ABC in der Linie op, welche man durch die zween Durchschnittspuncte o, p, ziehet, liegen muß.

Wäh-

Wählet man hernach in dem Bogen ABC noch einen dritten Punct C, und verfähret mit B und C auf gleiche Weise, wie man mit den Puncten A und B gethan hatte, so bekommt man die Linie qr, in welcher der gesuchte Mittelpunct ebenfalls liegen muß. Folglich wird dieser Mittelpunct nothwendig der Punct T seyn, in welchem die Linien op, qr, einander durchschneiden.

XII.

Dahero kann man, nach dieser gegebenen Methode, drey Puncte, man stelle sie wie man will, wofern sie nur nicht in einer geraden Linie liegen, allezeit durch einen Circulbogen verbinden, oder welches einerley ist: man kann um einen jedweden Triangel, ACB, welcherley Proportion auch seine Seiten AC, BC mit seiner Grundlinie AB haben, allezeit einen Circul beschreiben. Drey gegebene Puncte in einen Circul zu bringen. Um einen jedweden Triangel einen Circul zu beschreiben. 10 Fig.

XIII.

Wenn die jetzt gezeigte Methode, um einen jedweden Triangel einen Circul zu beschreiben, nach und nach bey verschiedenen Triangeln, als ACB, AEB, AGB, die in Ansehung ihrer Grundlinie AB eine mindere, oder auch eine größere Höhe haben, angewendet wird, so beobachtet man, daß, wenn man von einem Triangel ACB, dessen Gipfel einen sehr spitzigen Winkel hat, zu anderen Triangeln, AEB, AGB, deren Gipfel immer größere Winkel bekommen, fortgehet, der 11 Fig.

Mittelpunct des umschriebenen Circuls sich der Grundlinie AB immer mehr nähert, hernach aber gar unter dieselbe rücket, nachdem der Winkel am Gipfel, AGB, eine gewisse Größe erlangt hat. Wenn man nun solchergestalt diesen Mittelpunct, der erst über AB war, unter dieselbe Linie rücken siehet, so muß man, wie mich dünkt, begierig werden, nachzuforschen, von welcher Gattung wohl der Triangel AFB seyn werde, wenn der Mittelpunct des umschriebenen Circuls in die Linie AB selbst fällt.

12 Fig.

Diesen Triangel AFB zu finden, bemerke man anfangs, daß auf solchen Fall das Stück des um den Triangel beschriebenen Circuls völlig ein halber Circul seyn muß. Denn weil der Mittelpunct des Circuls in der Grundlinie AB liegen soll, die zween Endpuncte dieser Grundlinie aber, wie vorausgesetzet wird, im Umkreise befindlich sind, so kann der Mittelpunct M nirgends anders, als just in der Mitte von AB, liegen, so daß AB nothwendig ein Diameter seyn wird.

Wenn man aus einem beliebigen Puncte des Umkreises eines halben Circuls nach den Endpuncten des Diameters zwo gerade Linien ziehet, so bekommt

Man wird ferner sehen, daß, aus welchem Puncte, z. E. aus F, des halben Circuls man die Linien FA, FB ziehe, der Winkel AFB allezeit ein rechter Winkel seyn muß. Denn wenn man die Linie FM ziehet, so sind die zween Triangel AFM, MFB gleichschenkelichte Triangel. Dahero werden die zween Winkel AFM, MFB den Winkeln FAM, FBM nach ähnlicher Lage gleich seyn, oder,

oder, welches auf eins hinaus läuft, der ganze Winkel AFB wird der Summe der zween Winkel FAM, FBM gleich seyn. Nun sind aber die drey Winkel AFB, FAM, FBM, zusammengenommen, zweenen rechten Winkeln gleich: folglich wird AFB ein rechter Winkel seyn. man allezeit einen rechten Winkel.

Wenn man dahero über der Grundlinie AB einen beliebigen rechtwinkelichten Triangel beschreibet, so hat dieser Triangel die verlangte Eigenschaft an sich, daß er in einen Circul beschrieben wird, dessen Mittelpunct in seiner Grundlinie lieget.

XIV.

Diese Eigenschaft des Circuls, daß ein Winkel, dessen Gipfel im Umkreise lieget, und dessen Schenkel auf den Endpuncten des Diameters stehen, allezeit ein rechter Winkel ist, giebt Anlaß nachzuforschen, ob nicht vielleicht die übrigen Stücke des Circuls eine ähnliche Eigenschaft haben; zum Exempel, ob etwa die Winkel ACB, AEB, AFB, welche in einem Abschnitte des Circuls ACEFB beschrieben werden, einander gleich seyn möchten, so wie es diejenigen Winkel sind, die in einem halben Circul beschrieben werden. IX Taf. 1 Fig.

Hiervon Gewißheit zu erlangen, wollen wir zuerst die Größe eines dieser Winkel untersuchen, so werden wir hernach sehen, ob die anderen von gleichem Inhalte sind. Man nehme, zum Exempel, den Winkel AEB, 2 Fig.

dessen Gipfel E in der Mitte des Bogens AEB lieget. Weil die Linie EDG, welche durch den Mittelpunct D gehet, diesen Winkel in zwey gleiche Theile zerschneidet, so wird es genug seyn, den Winkel AEG, als dessen Hälfte, zu messen, oder, welches einerley ist, es wird genug seyn, zu wissen, welcher Theil eines schon gemessenen Winkels, wie ADG ist, der Winkel AEG sey. Ich nenne aber den Winkel ADG einen schon gemessenen Winkel, weil wir wissen, daß der Bogen AG dessen Maaß ist. (I Th. LII Art.)

Wenn man erwäget, daß der Triangel AED gleichschenkelicht ist, so wird man leichtlich sehen, daß der Winkel AEG die Hälfte des Winkels ADG ist. Denn die Winkel AED, EAD, (I Th. XXXI Art.) sind einander gleich. Es sind aber diese zween Winkel (I Th. LXVIII Art.) zusammengenommen, so groß, als der äußere Winkel ADG. Folglich ist der Winkel AED, oder AEG, die Hälfte des Winkels ADG.

Aus eben der Ursache ist der Winkel DEB die Hälfte des Winkels GDB. Dahero ist der ganze Winkel AEB der Hälfte des Winkels ADB gleich. Folglich ist sein Maaß die Hälfte des Bogens AGB.

XV.

Wenn man den Winkel AEB gemessen hat, und man nun ferner wissen will, ob er einem jeglichen der anderen Winkel, deren

Gipfel

Gipfel in eben demselben Abschnitte des Circuls liegen, gleich sey, so hat man zu untersuchen, ob einer von diesen willkührlich angenommenen Winkeln, zum Exempel AFB, ebenfalls die Hälfte des Winkels am Mittelpuncte ADB sey. Man wird hiervon leichtlich überzeuget werden, wenn man durch den Mittelpunct die gerade Linie FDG ziehet. Denn hierdurch siehet man, daß der Winkel AFB aus zweenen anderen, AFD, DFB, bestehet, welche, nach dem vorhergehenden Artikel, die Hälften der Winkel ADG, GDB sind: woraus man den Schluß machen kann, daß der ganze Winkel AFB die Hälfte des Winkels ADB ist. Bedienet man sich nun dieser Art zu schließen bey allen Winkeln ACB, AEB, AFB, deren Gipfel im Umkreise liegen, und welche mit ihren Schenkeln auf einerley Bogen AGB stehen, so erfolget daraus, daß diese Winkel einander gleich sind, so wie wir es im vorhergehenden Artikel vermuthet hatten.

3 Fig.

Alle Winkel, deren Gipfel im Umkreise eines Circuls liegen, und deren Schenkel auf einerley Bogen stehen, sind einander gleich, und haben zu ihrem gemeinschaftlichen Maaße die Hälfte des Bogens, auf welchem sie stehen.

1 Fig.

XVI.

Unter den vielerley Winkeln, deren Gipfel in einem Bogen, ACEFB, liegen, sind einige, welche, dem ersten Ansehen nach, in dem vorhin gegebenen Beweise nicht begriffen zu seyn scheinen, nämlich solche Winkel, wie AFB, die so beschaffen sind, daß, wenn man durch den Mittelpunct D die erforderte Linie FG ziehet, selbige außer dem Winkel ADB fället. Allein, weil man doch allezeit wahrnimmt, daß

4 Fig.

der

der Winkel DFA die Hälfte des Winkels GDA ist, und der Winkel DFB die Hälfte des Winkels GDB, so wird man befinden, daß der Winkel AFB, als der Ueberschuß des Winkels DFB über den Winkel DFA, auch in diesem Falle die Hälfte des Winkels ADB, als des Ueberschusses des Winkels GDB über den Winkel GDA, seyn muß.

XVII.

Nach den Figuren, deren wir uns hier bedienet haben, könnte es auch scheinen, als schickte sich der gegebene Beweis nur auf solche Abschnitte, die größer, als ein halber Circul sind. Aber es ist leicht zu sehen, daß ein jeg-
5 Fig. licher Winkel, wie AFB, dessen Gipfel in einem kleineren Abschnitte, als ein halber Circul ist, lieget, doch allemal aus zweenen anderen Winkeln DFB, DFA, bestehen wird, welche die Hälften der Winkel BDG, ADG, sind; und daß folglich dieser Winkel AFB die Hälfte der zween Bögen BG, AG, das heißt, die Hälfte des Bogens AGB, zu seinem Maaße haben muß.

XVIII.

Nachdem man gesehen hat, daß alle Win-
6 Fig. kel am Umkreise, wie AEB, AFB, AHB, welche in einerley Abschnitte des Circuls beschrieben werden, einander gleich sind, so wird man begierig, zu untersuchen, was aus dem Winkel AQB wird, wenn sein Gipfel mit dem

dem Puncte B, dem Ende der Grundlinie AB, zusammen fällt. Sollte wohl dieser Winkel alsdenn verschwinden? Es scheint aber nicht möglich zu seyn, daß selbiger, da er an Graden nicht abgenommen, auf einmal zu nichts werden sollte. Man kann nicht sehen, welches derjenige Punct seyn könne, über welchem dieser Winkel vergehen sollte. Wie wird demnach sein Maaß zu finden seyn? Die Auflösung dieser Schwierigkeit lehret allein die Geometrie des Unendlichen, von welcher alle Menschen wenigstens einen unvollkommenen Begriff haben, welchen wir nur entwickeln dürfen.

Man bemerke zuerst, daß, wenn der Punct E sich dem Puncte B nähert, indem er F, H, Q ꝛc. wird, die Linie EB immer kürzer, der Winkel EBA hingegen, welchen sie mit der Linie AB macht, beständig größer wird. So kurz aber auch die Linie QB werden kann, so bleibt doch der Winkel QBA nichtsdestoweniger ein Winkel: denn wenn er sichtbar werden soll, so darf man nur die verkürzte Linie QB nach R verlängern. Muß nun ein gleiches geschehen, wenn die Linie QB dermaßen abgenommen hat, daß sie endlich keine Größe mehr hat? Wo ist ihre Lage geblieben? wo ist ihre Länge hingekommen?

Es ist klar zu sehen, daß sie nichts anders ist, als die gerade Linie BS, welche den Circul in einem einzigen Puncte B berühret, ohne ihn an irgend einem Orte zu durchschneiden;

Der Tangent am Circul ist diejenige Linie, welche den Circul in einem einzigen Puncte berühret, ohne ihn irgendwo zu durchschneiden.

Der Winkel am Abschnitte ist derjenige Winkel, welchen die Sehne und der Tangent machen.

Sein Maaß ist die Hälfte des Abschnittes.

welche Linie aus dieser Ursache der Tangent *, (die Berührungs-Linie,) genennt wird.

Es ist ferner klar, daß, indem die Linie EB beständig kleiner wird, bis sie endlich vergehet, die Linie AE, welche nach und nach AF, AH, AQ ꝛc. wird, sich AB immer mehr nähert, und endlich mit ihr zusammen fällt. Folglich wird der Winkel am Umkreise, AEB, nachdem er AFB, AHB, AQB geworden, zuletzt der Winkel ABS, der aus der Sehne AB, und aus dem Tangenten BS entstehet; und dieser Winkel, welchen man den Winkel am Abschnitte nennet, muß allezeit die Eigenschaft behalten, daß er zu seinem Maaße die Hälfte des Bogens AGB hat.

Obwohl dieser Beweis für Anfänger ein wenig abstract ist, so habe ich doch für dienlich erachtet, ihn hier beyzubringen, weil es für diejenigen, die ihr Studiren bis zu der Geometrie des Unendlichen treiben wollen, überaus nützlich ist, sich bey Zeiten zu dergleichen Betrachtungen zu gewöhnen.

Wofern indessen dieser Beweis über die Kräfte der Anfänger gehen sollte, so kann man sie leichtlich in den Stand setzen, einen andern zu entdecken, wenn man ihnen die vornehmste Eigenschaft der Tangenten erkläret.

XIX.

* So hat es der Gebrauch eingeführet; es sollte aber billig die Tangente heißen.

XIX.

Diese Eigenschaft ist, daß ein Tangent an einem jedweden Puncte B des Circuls mit dem Diameter IDB, welcher durch eben denselben Punct gehet, senkrecht stehen muß. Denn weil die Krümme des Circuls so gleichförmig ist, daß ein jeglicher Diameter IDB ihn in zween halbe Circul IAB, IOB, theilet, welche nicht nur einander gleich sind, sondern auch eine gleiche Lage in Ansehung dieses Diameters haben, so müssen die zwey Theile BS, BH des beyden halben Circuln gemeinschaftlichen Tangenten ebenfalls in Ansehung dieses Diameters eine gleiche Lage haben; welches aber nicht möglich wäre, wofern nicht IDB mit dem Tangenten HBS senkrecht stünde.

7 Fig.

Der Tangent ist allezeit perpendicular mit demjenigen Diameter des Circuls, welcher durch den Berührungspunct gehet.

XX.

Hieraus ist leicht zu erkennen, warum der Winkel im Abschnitte, ABS, die Hälfte des Bogens AGB zu seinem Maaße habe.

Denn der Winkel ABD macht, nebst den zweenen gleichen Winkeln DAB, DBA, (I Th. LXIV Art.) zween rechte Winkel. Dahero macht die Hälfte des Winkels ADB, nebst dem Winkel DBA, einen rechten Winkel. Nun macht der Winkel DBA, nebst dem Winkel ABS, ebenfalls einen rechten Winkel. Dahero ist der Winkel ABS gleich der Hälfte des Winkels ADB. Folglich muß das Maaß des Winkels ABS die Hälfte des Bogens AGB seyn.

XXI.

Der zuletzt gegebene zweyte Beweis von dieser Eigenschaft des Circuls, daß der Winkel ABS zu seinem Maaße die Hälfte des Bogens AGB hat, giebt die Auflösung folgender Aufgabe an die Hand.

8 u. 9 Fig. Was ein Abschnitt sey, welcher eines gegebenen Winkels fähig ist.

Auf einer Linie AB einen Circul-Abschnitt zu beschreiben, welcher eines gegebenen Winkels L fähig ist; das heißt, einen Abschnitt AFB, in welchem alle Winkel am Umkreise, wie AFB, einem gegebenen Winkel L gleich sind.

Einen Abschnitt, der eines gegebenen Winkels fähig ist, zu beschreiben.

Diese Aufgabe aufzulösen, macht man zuerst in A und in B die Winkel BAS und ABS, jedweden dem Winkel L gleich. Alsdenn errichtet man über AS und BS aus den Puncten A und B die Perpendicul AD und BD: so ist der Punct D, wo sie einander durchschneiden, der Mittelpunct des verlangten Bogens AFB.

Denn nach dem XIX Artikel sind die Linien BS und AS die Tangenten des Circuls, dessen Mittelpunct D, der Strahl aber AD oder BD ist, immaßen BD und AD auf BS und AS senkrecht stehen. Ferner hat, nach dem vorhergehenden Artikel, der Winkel ABS zum Maaße die Hälfte von AGB; und, nach dem XV Artikel, ist das Maaß solcher Winkel, wie AFB, ebenfalls die Hälfte von AGB. Folglich sind die Winkel, wie AFB, dem Winkel ABS gleich, das heißt, dem Winkel L, wie verlangt worden war.

XXII.

Die Entdeckung der itzt erklärten Eigenschaften des Circul-Abschnittes haben wir wahrscheinlicher Weise der bloßen Neugierigkeit der Geometriekundigen zu danken. Es ist aber daraus eben dasjenige erfolget, was noch täglich aus vielen andern Entdeckungen zu erfolgen pfleget: nämlich, was anfangs ganz unnütz zu seyn schien, das wird nach und nach nutzbar. Man hat in der Ausübung sehr glückliche Anwendungen der itzo erklärten Eigenschaft des Circuls gemacht. Ich will nur eine davon anführen, indem ich die Auflösung einer in der Erdbeschreibung oftmals nothwendigen Aufgabe geben werde.

A, B, C, sind drey Oerter, deren Weiten von einander, AB, BC, AC, bekannt sind. Es wird zu wissen begehrt, in welcher Weite von diesen Oertern ein gewisser Punct D liege, aus welchem man alle drey zwar sehen, aber nicht zu ihnen kommen kann, daß man die benöthigten Verrichtungen auf dem Lande anstellen könnte. 10 Fig. Die Weite eines Ortes von drey andern zu finden, deren Lagen bekannt sind.

Zuerst macht man auf dem Papier drey Puncte a, b, c, welche auf eben die Weise, wie A, B, C, von einander entfernet sind; das heißt, um sich geometrischer Ausdrücke zu bedienen: man macht den Triangel abc dem Triangel ABC ähnlich. 10 u. 11 Fig.

Nachdem man ferner mit dem Feld-Winkelmesser die Größe der Winkel ADB, BDC gemessen hat, so beschreibet man über der

Bayerische Staatsbibliothek München

Linie ab den des Winkels ADB fähigen Abschnitt bda, und über der Linie bc einen andern Abschnitt bdc, welcher des Winkels BDC fähig ist: so giebt der Punct d, wo beyde Abschnitte (oder beyde Circul) einander durchschneiden, auf dem Papiere die Lage des Ortes D; das heißt, es machen die Linien da, db, dc, eben dieselbe Proportion in Ansehung ab, bc, ac, wie die gesuchten Weiten DA, DB, DC, in Ansehung der gegebenen Weiten AB, BC, AC; welches keines Beweises bedarf, nachdem man von den ähnlichen Figuren unterrichtet ist.

XXIII.

Man könnte leichtlich zeigen, daß man aus den erwiesenen Eigenschaften des Circuls noch viel wichtigere Hülfsmittel für die Ausübung gezogen hat. Allein, es ist dienlicher, zu anderen Eigenschaften des Circuls fortzugehen, welche aus den vorigen hergeleitet worden, und ebenfalls ihren Nutzen gehabt haben.

Um nun in Erfindung dieser Eigenschaften uns an eine Ordnung zu halten, merken wir zuerst an, daß, weil jegliche zween Winkel, wie EDC, EBC, welche auf einerley Bogen, wie EFC, stehen, einander gleich sind, daraus erfolgen muß, daß die Triangel DAE, BAC, gleiche Winkel haben, das heißt, (I Th. XXXIX Art.) daß diese Triangel einander ähnlich sind.

X Taf. 1 Fig.

Denn

Denn aus eben der Ursache, um welcher willen der Winkel EDC dem Winkel EBC gleich ist, wird auch der Winkel DEB dem Winkel DCB gleich seyn. Und was die Winkel DAE, BAC, betrifft, diese müssen einander nothwendig gleich seyn: es sey nun, daß sie, wie in einigen Fällen geschieht, aus einerley Linien bestehen, oder auch, wofern sie aus verschiedenen bestehen, weil in zweenen Triangeln, deren einer zween Winkel hat, welche zweenen Winkeln des andern, nach ähnlicher Lage, gleich sind, nothwendig auch die dritten Winkel eine gleiche Größe haben. (I Th. XXXVIII Art.)

Um hernach in den Triangeln ADE, ABC, die allgemeinen Eigenschaften der ähnlichen Triangel desto leichter wahrzunehmen, wollen wir den Triangel DAE auf den Triangel BAC dergestalt legen, daß AD auf AB, und AE auf AC zu liegen komme, damit DE mit BC parallel werde. Nun erinnere man sich, 1 u. 2 Fig.

1) Daß, wenn zween Triangel, ADE, ABC, einander ähnlich sind, die vier Seiten, AC, AE, AB, AD, zusammen eine Proportion machen. (I Th. XXXIX Art.)

2) Daß in einer jedweden Proportion das Product der äußersten Glieder gleich ist dem Producte der mittleren: (II Th. VIII Art.) so werden wir daraus den Schluß machen, daß das Rectangel, oder das Product von AC durch AD gleich ist dem Rectangel von

Wenn in einem Circul zwo Sehnen einander durchschneiden, so ist das Rectangel aus den Theilen der einen gleich dem Rectangel aus den Theilen der andern.

AE durch AB. Eine sehr merkwürdige Eigenschaft des Circuls, welche sich folgendermaßen ausdrücken lässet: Wenn man in einem Circul nach Willkühr zwo gerade Linien ziehet, welche einander durchschneiden, so ist das Product der zwey Theile der einen gleich dem Producte der zwey Theile der andern.

XXIV.

3 Fig.

In einem Circul ist das Quadrat eines jeglichen Perpendiculs, der auf dem Diameter errichtet wird, gleich dem Rectangel der beyden Theile des Diameters.

Wenn die zwo geraden Linien, oder Sehnen, BE, DC, einander senkrecht durchschnitten, und eine von beyden, zum Exempel DC, ein Diameter des Circuls wäre, so ist klar, daß die zwey Theile AB, AE der andern Linie BE einander gleich seyn müßten; daß folglich die vorhin angeführte Eigenschaft, in diesem besonderen Falle, also ausgedrückt würde: Wenn man auf dem Diameter DC eines Circuls nach Willkühr einen Perpendicul AB errichtet, so ist das Quadrat dieses Perpendiculs gleich dem Rectangel von AD durch AC.

XXV.

Ein Rectangel in ein Quadrat zu verwandeln.

4 Fig.

Man hat oftmals nöthig, ein Rectangel in ein Quadrat zu verwandeln, wozu der vorhergehende Artikel ein leichtes Mittel an die Hand giebt. Es sey ACFE das gegebene Rectangel. Man verlängert AC bis nach D, so daß AD gleich wird AE, und beschreibet den halben Circul DBC, dessen Diameter DC ist. Alsdenn verlängert man auch die Seite EA, bis sie den halben Circul in B durch-

durchschneidet, so ist AB die Seite des gesuchten Quadrates ABGH, welches dem gegebenen Rectangel AFCE gleich ist.

XXVI.

Man pflegt sonst eine Aufgabe zu geben, welche, unter einer andern Gestalt, eben diejenige ist, die wir itzt aufgelöset haben, nämlich, eine mittlere Proportional-Linie * zwischen zwo gegebenen Linien zu finden. Man verstehet unter dieser mittleren Proportional-Linie eine Linie, welche in Ansehung der kleinsten von den gegebenen eben so groß ist, als sie in Ansehung der größten klein ist; das heißt, daß, wenn zum Exempel AB die mittlere Proportional-Linie zwischen AD und AC ist, man sagen könne, es verhalte sich AD zu AB, wie AB zu AC. Nun ist sehr leicht zu sehen, daß diese Aufgabe mit der vorigen einerley ist, weil (II Th. VIII Art.) das Product von AD durch AC, das heißt, das Rectangel dieser zwo Linien, gleich ist dem Producte von AB durch AB, nämlich dem Quadrate von AB.

* Was die mittlere Proportional-Linie zwischen zwo geraden Linien ist.

Wenn man dahero eine mittlere Proportional-Linie zwischen zwo gegebenen Linien finden will, so verwandelt man das Rectangel dieser zwo Linien in ein Quadrat, dessen Seite die gesuchte Linie seyn wird.

Wie sie gefunden wird.

XXVII.

Man kann diese mittlere Proportional-Linie zwischen zwo gegebenen Linien noch auf eine andere Art finden, welche aus der im XIII

Andere Art, dieselbe zu finden.

Artikel erklärten Eigenschaft des Circuls erfolget. Wir setzen, es sey AC die größte der zwo gegebenen Linien, AD aber die kleineste. Man errichtet aus D, über AC, den Perpendicul DB: so giebt der Punct B, wo dieser Perpendicul den auf dem Diameter AC beschriebenen halben Circul ABC durchschneidet, die Linie AB zur mittleren Proportional-Linie zwischen AB und AC. Denn wenn man BC ziehet, so ist klar, daß der Triangel ABC in B rechtwinkelicht ist. Folglich wird dieser Triangel (I Th. XXXVIII Art.) dem Triangel ABD ähnlich seyn, weil beyde Triangel noch überdieß den Winkel A gemeinschaftlich haben. Wenn aber die Triangel ADB und ABC einander ähnlich sind, so sind ihre Seiten proportional. Folglich ist AD zu AB, wie AB zu AC. Folglich ist AB die mittlere Proportional-Linie zwischen AD und AC.

5 Fig.

XXVIII.

Eine geradlinichte Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Will man eine jedwede geradlinichte Figur in ein Quadrat verwandeln, so darf man nur, um diese Aufgabe durch den XXV Artikel aufzulösen, aus der gegebenen Figur ein Rectangel machen: welches leicht zu bewerkstelligen ist, weil geradlinichte Figuren nichts anders, als Zusammensetzungen von Triangeln sind; weil ferner ein jeder Triangel die Hälfte eines Rectangels von gleicher Höhe und von gleicher Grundlinie ist; und weil endlich alle aus Triangeln entstandene Rectangel nur ein ein-

einziges Rectangel machen, wenn man allen eine gemeinschaftliche Höhe giebt. (II Th. VI Art.)

XXIX.

Auch diejenigen Figuren, deren Umfang Circulbögen in sich schließet, können in Quadrate verwandelt werden, wenn man nach practischer Art die Länge der Bögen, aus denen sie bestehen, gemessen hat. Denn man kann hernach diese Figuren, so wie die geradlinichten, in Rectangel verwandeln. Man bedienet sich hierzu des IX und X Artikels, wo man alle Gattungen Circulförmiger Figuren hat messen lernen.

XXX.

Aus der im XXIV Artikel erklärten Eigenschaft des Circuls ergiebt sich noch eine überaus leichte Methode, ein Quadrat zu machen, welches mit einem andern gegebenen Quadrat ein gegebenes Verhältniß hat; welche Aufgabe wir im XXII Artikel des zweyten Theiles aufzulösen versprochen hatten.

Ein Quadrat zu machen, welches mit einem andern ein Verhältniß hat.

Wir setzen, zum Exempel, man wollte ein Quadrat machen, welches sich zum Quadrate ABCD, wie die Linie M zur Linie N verhalten sollte. Man theilet (I Th. XLI Art.) die Seite CB im Puncte E dergestalt ein, daß CB zu BE sey, wie die Linie N zur Linie M. Alsdenn ziehet man aus E die Linie EF parallel mit AB, so bekommt das Rectangel ABEF eben dieselbe Fläche, welche das verlangte Quadrat haben soll. Folglich ist weiter nichts

6 Fig.

übrig, als dieses Rectangel in ein Quadrat zu verwandeln. (XXV Art.)

XXXI.

7 u. 8 Fig. Ein Vieleck zu machen, welches mit einem andern ähnlichen Vielecke ein gegebenes Verhältniß hat.

Will man ein Vieleck HIKLM machen, welches mit einem andern ähnlichen Vielecke ABCDE dasselbe Verhältniß habe, wie die Linie X mit der Linie Y, so errichtet man zuerst über der Seite AB des gegebenen Vieleckes ABCDE das Quadrat ABGF. Ferner suchet man ein anderes Quadrat HIOQ, welches sich zum Quadrate ABGF, wie die Linie X zur Linie Y verhalte. Endlich beschreibet man über der Seite HI dieses neuen Quadrates ein Vieleck HIKLM, welches dem ersten Vielecke ABCDE ähnlich ist, so ist dieses das verlangte Vieleck. Die Ursache davon ist leicht zu finden, wenn man sich erinnert, (I Th. XLVIII Art.) daß ähnliche Figuren sich unter einander verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

XXXII.

Einen Circul zu machen, welcher mit einem andern ein gegebenes Verhältniß hat.

Verlanget man einen Circul zu machen, dessen Fläche sich zur Fläche eines gegebenen Circuls wie X zu Y verhalten soll, so errichtet man ein Quadrat, welches sich zum Quadrate des Strahles des gegebenen Circuls wie X zu Y verhält: so giebt die Seite dieses neuen Quadrates den Strahl des verlangten Circuls.

XXXIII.

Noch eine andere Eigenschaft des Circuls erfolget aus derjenigen, welche die vorhergehenden Aufgaben an die Hand gegeben haben.

Wenn

Wenn man aus einem Puncte A, den man außer dem Circul annimmt, nach Belieben zwo gerade Linien ABC, ADE, ziehet, deren jedwede den Umkreis in zweenen Puncten durchschneidet, hernach aber die Linien CD, BE, so sind die Triangel ACD, AEB, einander ähnlich; weil der Winkel A beyden Triangeln gemein ist, und sie auch überdieß zween gleiche Winkel, nämlich die am Umkreise, C und E, haben. Hieraus nun, daß die Triangel CAD, EAB, einander ähnlich sind, erfolget, daß die vier Linien AB, AD, AE, AC, eine Proportion machen, und folglich, daß das Rectangel der zwo Linien AB, AC, gleich ist dem Rectangel der zwo Linien AD, AE; welches sich auf folgende Weise ausdrücken lässet: Wenn man aus einem beliebigen Puncte A, der außer dem Circul angenommen wird, nach Gutdünken zwo gerade Linien AC, AE, ziehet, welche durch den Circul gehen, so ist das Rectangel der Linie AC, durch ihren äußeren Theil AB, gleich dem Rectangel von AE, durch ihren äußeren Theil AD.

9 Fig. Wenn man aus einem Puncte, der außer dem Circul liegt, zwo Linien ziehet, welche durch den Circul gehen, so sind die Rectangel dieser Linien, durch ihre äußere Theile, einander gleich.

XXXIV.

Wenn die aus dem Puncte A gezogene Linie, anstatt den Circul zu durchschneiden, ihn bloß berühret, wie AF thut, so wird aus der zuvor erwiesenen Eigenschaft folgende: Das Quadrat eines Tangenten AF ist gleich dem Rectangel, welches aus einem jeglichen Secanten (Durchschnitts-Linie,) wie AE, und dessen

Das Quadrat des Tangenten ist gleich dem Rectangel des Secanten, durch seinen äußeren Theil.

äußerem Theile AD, errichtet wird. Dieses ist leicht zu erweisen. Denn wenn man die gerade Linie AF, welche den Circul berühret, als eine Linie betrachtet, die ihn in zweenen unendlich nahen Puncten durchschnitte, so sind die Linien AB, AC, nur eine einzige Linie AF; und man bekommt anstatt des Rectangels von AB durch AC, das Quadrat von AF.

XXXV.

10 Fig. Aus einem außer dem Circul gegebenen Puncte einen Tangenten zu ziehen.

Obgleich der im vorigen Artikel erwiesene Satz den Inhalt des Quadrates eines Tangenten AF lehret, so unterrichtet er uns doch nicht, wie dieser Tangent aus dem gegebenen Puncte A zu ziehen sey. Um nun denselben ziehen zu lernen, erinnere man sich, (XIX Art.) daß der Strahl FG mit dem Tangenten FA senkrecht stehet. Dahero wird nur erfordert, auf dem gegebenen Circul einen Punct F zu finden, welcher so liege, daß der Winkel AFG ein rechter Winkel werde. Folglich, wenn man über AG einen halben Circul beschreibet, ist der Punct, wo er den Circul FKO durchschneidet, (XIII Art.) der verlangte Punct F.

Anfangs-

Anfangsgründe der Geometrie.

Vierter Theil.

Von der Art, körperliche Figuren und ihre Oberflächen auszumessen.

Die Gründe, so wir in den drey ersten Theilen dieses Werkes vestgesetzt haben, wären zwar hinlänglich, weit schwerere Aufgaben aufzulösen, als es diejenigen sind, die wir itzt vor uns nehmen. Aber es ist der Ordnung, die wir in dem Vorhergehenden beobachtet haben, mehr gemäß, nunmehr zur Ausmessung der körperlichen Figuren fortzugehen, ich meyne diejenigen umgrenzten Erstreckungen, welche dreyerley Dimen-

mensionen, eine Länge, eine Breite und eine Tiefe haben.

Ohne Zweifel ist diese Untersuchung eines der ersten Objecte gewesen, welche den Fleiß der Erdmesser auf sich gezogen. Man hat, zum Exempel, zu wissen verlangt, wie viel Werkstücke in einer Mauer wären, deren Höhe,
XI Taf. 1 Fig. AD, die Breite, AB, und die Tiefe, oder Dicke, BG, bekannt waren. Man hat sich vorgesetzt, die Menge Wassers in einem Gra-
2 Fig. ben, oder in einem Wasserbehältnisse, ABCD, zu bestimmen. Man hat den körperlichen Inhalt eines Thurmes, einer Säule, eines Hauses, u. d. m. zu finden begehrt.

Damit wir nun solche Figuren, welche alle drey Dimensionen haben, auf eben dieselbe Art abhandeln, wie wir mit denen gethan haben, die deren nur zwo haben, so lasse man uns zuvörderst diejenigen Körper untersuchen, die von geraden (ebenen) Flächen umschlossen werden.

Wir haben nicht nöthig, zu zeigen, wie die Oberflächen dieser Körper auszumessen sind: denn sie können nichts anders, als Zusammensetzungen geradlinichter Figuren seyn; und folglich ergiebt sich ihr Maaß aus demjenigen, was wir im ersten Theile gezeiget haben.

I.

Um den Inhalt der Körper auszumessen, ist es sehr natürlich, sie alle auf den einfachesten Körper zu bringen, so wie wir, um die

Flächen

Flächen zu messen, sie alle auf das Quadrat gebracht haben. Nun ist aber der einfacheste Körper der Würfel, (Cubus,) welcher unter den Körpern in der That eben dasjenige ist, was das Quadrat unter den Flächen ist, nämlich ein Raum, wie a b c d e f g h,* dessen Länge, Breite und Dicke einander gleich sind; oder, welches auf eins hinaus läuft: eine körperliche Figur, die von sechs gleichen Seitenflächen, welches Quadrate sind, eingeschlossen ist.

Der Würfel ist eine körperliche Figur, welche in sechs Quadrate eingeschlossen ist. Er dienet zum gemeinschaftlichen Maaße der Körper.

* 3 Fig.

Die Seite des Würfels heißt die Seite der Quadrate, welche ihn einschließen.

Durch einen Cubic-Schuh verstehet man einen Würfel, dessen Seite einen Schuh lang ist. Gleichermaßen heißt ein Cubic-Zoll ein Würfel, dessen Seite einen Zoll lang ist; u. s. w.

II.

1 Fig.

Die Körper, deren Maaß am öftersten erfordert wird, sind solche, wie ABCDEFGH, welche von sechs Rectangeln, A B C D, C B G F, C F E D, D E H A, G F E H, A B G H, umschlossen werden. Man nennet dieselben Parallelepipeda, weil ihre einander gegenüber stehenden Seitenflächen, welche in allen ihren Puncten einerley Weite von einander behalten, parallel heißen, gleichwie die Linien, die stets in gleicher Weite von einander abstehen, parallel genennt werden.

Das Parallelepipedum ist eine körperliche Figur, welche in sechs Rectangel eingeschlossen ist.

Parallel-Flächen sind diejenigen, die immer in gleicher Weite von einander abstehen.

III.

Wenn wir dahero Körper von dieser Gattung ausmessen wollen, so giebt uns die Aehnlichkeit zwischen dieser Aufgabe und derjenigen, die von der Ausmessung der rechtwinkelichten Figuren handelte, ein leichtes Mittel an die Hand, dieselbe aufzulösen.

Den körperlichen Inhalt des Parallelepipedi zu finden.

Zuerst misset man insbesondere die Länge AD, die Breite AB, und die Dicke BG der gegebenen Figur, entweder nach Schuhen, oder nach Zollen, u. s. w. Alsdenn multipliciret man zwo von den gefundenen drey Zahlen durch einander, und was herauskommt, durch die dritte, so zeiget das Product an, wie viel das Parallelepipedum Cubic-Schuhe, Cubic-Zolle u. s. w. hält, nach dem nämlich das Maaß der Länge, der Breite und der Dicke nach Schuhen, oder nach Zollen u. s. w. ist angenommen worden. Diese Verrichtung deutlicher zu zeigen, wollen wir ein Exempel geben.

Es sey die Länge AD 6 Schuhe, die Breite AB 5 Schuhe, und die Dicke BG 4 Schuhe, so hat das Rectangel ABCD (I Th. XI Art.) 6mal 5, oder 30 Quadrat-Schuhe. Hernach stelle man sich vor, als theilte man die Linien BG, CF, DE, AH, welche insgesammt das Maaß der Dicke des Körpers sind, jedwede in vier gleiche Theile, und ließe durch die einander gegenüber stehenden Theilungspuncte eben so viel gerade Parallel-Flächen gehen:

gehen: so theilen diese Flächen das gegebene Parallelepipedum in vier andere Parallelepipeda, deren jegliches einen Schuh dicke ist, und welche einander insgesammt gleich und ähnlich sind. Nun zeiget schon das bloße Anschauen der Figur, daß das erste von diesen Parallelepipedis 30 Cubic-Schuhe hält, weil seine äußerliche Seitenfläche ABCD 30 Quadrat-Schuhe fasset. Folglich wird der ganze Körper ABCDEFGH 4mal 30, oder 120 Cubic-Schuhe in sich halten.

IV.

Wir wollen uns mit Erklärung derjenigen Mittel, die man, um Parallelepipeda zu errichten, in der Ausübung anwenden kann, nicht aufhalten, weil solche meistentheils so leicht zu finden sind, daß jedermann sich selbige vorstellen kann. Vielmehr wollen wir zeigen, wie das Parallelepipedum * entstehet, weil diese Betrachtung nützlicher, als die andern ist.

Das Parallelepipedum entstehet, wenn ein Rectangel sich, mit sich selbst parallel bleibend, an einer Linie auf- oder unterwärts beweget.

Man gedenket sich, es bewege sich ein Quadrat, oder ein Rectangel, wie ABGH, sich selbst parallel bleibend, dergestalt, daß jeglicher von dessen vier Winkeln, A, B, G, H, eine der vier Linien, AB, BC, GF, HE, welche auf der Fläche des Rectangels ABGH senkrecht stehen, durchläuft.

V.

* Eigentlich das gerade Parallelepipedum. Von dem schiefen sehe man den XXV. Art. dieses Theiles.

V.

Eine Perpendicular-Linie auf einer geraden Fläche ist diejenige Linie, die sich nach keiner Seite derselben Fläche neiget.

Eine gleiche Bewandniß hat es mit einer geraden Fläche, welche auf einer andern perpendicular stehet.

Es ist beynahe überflüßig, zu erinnern, daß wir durch eine Linie, die mit einer geraden Fläche senkrecht ist; diejenige Linie verstehen, welche sich nach keiner Seite derselben Fläche neiget. Und gleichermaßen wird eine gerade Fläche, die sich nach keiner Seite einer andern geraden Fläche, worauf sie stehet, neiget, mit selbiger senkrecht genennt. Diese zwo Erklärungen sind denen ähnlich, welche wir oben im ersten Theile von Linien, die senkrecht auf einander stehen, gegeben haben.

VI.

4 Fig.

Eine Linie, die mit einer geraden Fläche perpendicular stehet, ist mit allen Linien derselben Fläche, welche aus dem Puncte, wo diese Linie stehet, ihren Anfang nehmen, perpendicular.

Hieraus erfolget, daß die Linie AB, die mit der geraden Fläche X senkrecht stehet, mit allen Linien AC, AD, AE ꝛc. welche in dieser Fläche liegen, und ihren Anfang aus dem Puncte A nehmen, senkrecht seyn muß. Denn es ist klar zu sehen, daß, wenn sie sich nach irgend einer von diesen Linien neigte, sie sich auch nach einer Seite der Fläche neigen müßte; und so könnte sie nicht senkrecht mit dieser Fläche stehen.

VII.

Damit man sich auf eine recht deutliche Art vorstellen möge, wie die Linie AB mit allen Linien, die aus dem Endpuncte A ihren Anfang nehmen, senkrecht stehen könne, darf man nur folgende erhobene Figur machen.

Man

Man macht aus einer ebenen und biegsamen Materie, zum Exempel aus Pappe, ein Rectangel FGDE, und theilet dasselbe durch 5 Fig. die gerade Linie AB, welche mit den Seiten ED, FG, senkrecht stehet, in zwey gleiche Theile. Alsdenn beuget man dieses Rectangel, längs der Linie AB, so wie die Figur an- 6 Fig. zeiget, und setzet es mit dieser Beugung auf die gerade Fläche X. Es ist klar, daß, welchen Winkel auch die zwey Theile FBAE, GBAD des eingebogenen Rectangels EADGBF machen, dieselben doch allezeit auf der Fläche X genau aufliegen werden, ohne daß die Linie AB ihre Stellung, in Ansehung dieser Fläche, veränderte. Dahero wird die Linie AB mit allen Linien, welche aus dem Endpuncte A ihren Anfang nehmen, und in der Fläche X liegen, senkrecht stehen, weil die Seiten AE, AD des eingebogenen Rectangels, wenn man es mehr aus einander, oder auch mehr zusammenbeuget, nach und nach auf alle diese Linien zu liegen kommen.

VIII.

Es ergiebt sich hieraus eine sehr bequeme Art, sowol aus einem gegebenen Puncte in der geraden Fläche eine mit dieser Fläche senkrechte Linie aufzurichten, als auch aus einem über der Fläche befindlichen Puncte eine senkrechte Linie darauf fallen zu lassen. Denn es sey der gegebene Punct entweder in der Fläche, 7 Fig. zum Exempel, in A, oder auch über der Fläche, Auf eine leichte pra-

ctische Art einen Perpendicul über einer geraden Fläche aufzurichten, oder auch darauf zu fällen.

wie in H, so kann man doch allezeit das eingebogene Rectangel EFBGDA auf der Fläche X so lange herumführen, bis dessen Falte AB den gegebenen Punct berühret: und so wird AB in beyden Fällen der verlangte Perpendicul seyn.

IX.

Eine Linie ist mit einer geraden Fläche perpendicular, wenn sie mit zwoen Linien derselben Fläche, die aus dem Puncte, wo sie stehet, ihren Anfang nehmen, perpendicular ist.

Es erfolget ferner daraus, daß eine Linie AB mit einer geraden Fläche X allezeit senkrecht seyn muß, wenn sie mit zwoen Linien AE, AD derselben Fläche senkrecht stehet. Denn man kann sodann AB als die Falte eines Rectangels ansehen, von dessen zwoen eingebogenen Seiten eine auf AE, und die andere auf AD stünde; und diese Falte müßte mit der Fläche X allezeit senkrecht stehen.

X.

Wenn man auf eine Linie KL mit der geraden Fläche X, worinnen diese Linie liegt, eine andere solche Fläche senkrecht aufrichten will, so kann man sich hierzu ebenfalls des eingebogenen Rectangels GFBEAD bedienen. Denn man setzet die Seite AD eines seiner Theile, ADGB, auf die Linie KL, so ist die Fläche dieses Theiles ADGB die verlangte Perpendicular-Fläche.

Auf einer geraden Fläche eine andere solche Fläche perpendicular aufzurichten.

XI.

Es ist leicht zu sehen, daß, wenn man eine dritte gerade Fläche Y auf die zwo Seiten FB

8 Fig.

FB und BG des eingebogenen Rectangels setzte, die Fläche Y mit der Linie AB ebenfalls senkrecht stehen, und folglich mit der Fläche X parallel seyn müßte.

Wenn man dahero auf einer geraden Fläche X drey Perpendicul EF, AB, DG, von gleicher Länge aufrichtet, die aber nicht in einer geraden Linie liegen, so ist die gerade Fläche Y, welche durch die drey Puncte F, B, G, gehet, mit der Fläche X parallel. Eine gerade Fläche mit einer andern solchen Fläche parallel zu führen.

XII.

Wenn zwo gerade Flächen nicht parallel sind, so ist es leicht, den Winkel zu finden, welchen sie mit einander machen, wenn man sich wiederum des oft erwähnten eingebogenen Rectangels bedienet. Denn man lege eines der zwey Theile ABGD des Rectangels auf die gerade Fläche X, so ist klar, daß der Winkel EAD, oder auch FBG, welcher diesem gleich ist, die Neigung der Fläche EABF gegen DABG messen wird. Bemerket man nun, daß AB der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Flächen ist, und daß EA und AD mit AB senkrecht sind, so ist es nicht schwer, folgende Regel daraus zu ziehen. 9 Fig.

Wenn zwo gerade Flächen gegeben werden, die nicht mit einander parallel sind, so muß man zuerst diejenige gerade Linie suchen, welche der gemeinschaftliche Durchschnitt beyder Flächen ist. Alsdenn ziehet man aus einem beliebigen Puncte dieser Linie zween Perpendicul Die Neigung, so zwo gerade Flächen gegen einander machen, zu messen.

cul mit ihr, deren jeglicher in einer von diesen Flächen liegt, so ist der Winkel, den diese zween Perpendicul mit einander machen, das Maaß desjenigen Winkels, welchen die gegebenen zwo Flächen machen.

XIII.

Die Neigung einer Linie gegen eine gerade Fläche zu messen.

Da es leicht zu bemerken ist, daß, indem sich ABFE an seiner Falte AB beweget, die gerade Linie AE, deren Endpunct E einen Circulbogen ED beschreibet, von einer geraden Fläche, wie EAHD, welche mit X senkrecht ist, niemals abkommt, und daß die Neigung der geraden Linie EA gegen X nichts anders ist, als der Winkel EAD: so entdecket man wiederum ohne Mühe, daß die Neigung einer jeglichen geraden Linie, wie EA, gegen die Fläche X, zum Maaße habe den Winkel EAH, zwischen dieser Linie und der Linie AD, welche durch A und durch den Punct H der Fläche X gehet, wo der Perpendicul EA fällt, welcher aus einem beliebigen Puncte E der Linie AE auf X gefället wird.

XIV.

Das bloße Anschauen der Figur, deren wir uns im vorhergehenden Artikel bedienet haben, zeiget ein neues Mittel, aus einem Puncte E, der über einer geraden Fläche X befindlich ist, eine mit dieser Fläche senkrechte Linie EH zu ziehen.

Zuerst ziehet man nach Gutdünken in der Fläche X eine Linie BAS, und fället aus dem gegebenen Puncte E auf diese Linie den Perpendicul EA. Wenn dieses geschehen ist, so errichtet man aus dem Puncte A, wohin dieser Perpendicul fällt, in der Fläche X, über der Linie AB, den zweyten Perpendicul AD. Endlich läßt man aus dem Puncte E auf die Linie AD den dritten Perpendicul EH fallen: so ist dieser die verlangte senkrechte Linie auf der Fläche X. Neue Art, auf eine gerade Fläche einen Perpendicul zu fällen.

XV.

Es ergiebt sich hieraus eine zweyte Art, aus einem gegebenen Puncte M auf einer geraden Fläche X eine senkrechte Linie MN aufzurichten. Zweyte Art, auf einer geraden Fläche einen Perpendicul aufzurichten.

Nachdem man aus einem beliebigen Puncte E, welcher sich über der geraden Fläche X befindet, die senkrechte Linie EH auf diese Fläche gefället hat, so ziehet man durch den gegebenen Punct M die gerade Linie MN mit HE parallel, so ist dieselbe der Perpendicul auf der Fläche X.

XVI.

Nach dem Parallelepipedo ist der einfachste Körper das gerade (oder geradstehende) Prisma. Dieses ist eine Figur, wie ABC DEFGHIKLM, deren zwo einander gegenüber stehende und parallele Grundflächen 10 Fig. Das geradstehende Prisma ist eine körperliche Figur, de-

ren zwo einander gegenüber stehende Grundflächen zwey gleiche und ähnliche Vielecke, die Seitenflächen aber Rectangel sind.

zwey gleiche und ähnliche Vielecke * sind, und zwar also gestellet, daß die Seiten GF, FE, 2c. des einen, mit den Seiten BC, CD, 2c. des andern parallel gehen; und deren Seitenflächen Rectangel ABGH, BGFC, 2c. sind.

XVII.

Wie die geraden Prismata entstehen.

Wie die Geometrielehrer voraussetzen, entstehen diese Figuren sowol, als die Parallelepipeda, wenn eine Grundfläche ABCDLM sich, mit sich selbst parallel bleibend, dergestalt beweget, daß ihre Winkel A, B, 2c. denen auf dieser Grundfläche errichteten Perpendiculn folgen.

XVIII.

Die verschiedenen Gattungen der Prismatum zu unterscheiden, setzet man den Namen des Vieleckes hinzu, welches ihnen zur Grundfläche dienet; zum Exempel, ein sechseckichtes Prisma ist, dessen Grundfläche ein Sechseck ist; u. s. w.

XIX.

Zwey Prismata von gleichen Grundflächen verhalten sich unter einander, wie ihre Höhen.

Die Art zu finden, alle Gattungen gerader Prismatum auszumessen, hat man zuvörderst zu bemerken, daß unter zweyen geraden, deren Grundflächen einander gleich wären, dasjenige, welches die größte Höhe hätte, in seinem

* Worunter auch die Dreyecke und die Vierecke gerechnet werden; I Th. XXIII Art.

fläche a b g h eben dieselbe ist, oder einerley Inhalt mit der Grundfläche ABGH hat, und wenn der aus der oberen Fläche d c f e auf die unterste a b g h gefällte Perpendicul dem aus der oberen Fläche DCFE auf die unterste ABGH herabgesenkten gleich ist.

XXVI.

Nachdem wir die Parallelepipeda und die Prismata abgehandelt haben, so untersuchen wir nunmehr die Pyramiden, das heißt, solche Körper, wie ABCDEFG, * welche von einer gewissen Anzahl Triangel einge- schlossen sind, die alle aus einem Gipfel A kommen, und mit ihren Grundlinien an den Seiten eines Vieleckes BCDEFG anliegen. Es ist nöthig, diese Gattung von Körpern zu betrachten, nicht allein, weil sie in Gebäuden und in anderen Werken vorkommen, sondern auch, weil alle körperliche Figuren, die von geraden Flächen eingeschlossen werden, Zusammensetzungen von Pyramiden sind, so wie die geradlinichten Figuren Zusammensetzungen von Triangeln sind. Zum Beweise dessen, darf man nur aus einem nach Gutdünken angenommenen Puncte in dem Inneren des gegebenen Körpers nach allen Winkeln desselben gerade Linien ziehen.

Die Pyramide ist ein Körper, welcher in eine gewisse Anzahl Triangel eingeschlossen ist, die alle aus einem Gipfel kommen, und mit ihren Grundlinien an den Seiten eines Vieleckes anliegen.

* 3 Fig.

XXVII.

Man unterscheidet die verschiedenen Gattungen der Pyramiden, gleichwie die Prismata,

mata, dadurch, daß man den Namen des Vieleckes, welches ihnen zur Grundfläche dienet, hinzusetzet; zum Exempel, eine dreyeckichte Pyramide heißt diejenige, welche drey, eine viereckichte, welche vier Ecken hat, u. s. w.

XXVIII.

Wenn die Pyramide eine ordentliche Figur zur Grundfläche hat, und ihr Gipfel über dem Mittelpuncte H der Grundfläche senkrecht erhaben ist, wie solches die dritte Figur anzeiget, so heißt sie eine gerade Pyramide; und im Gegentheile wird sie eine schiefe Pyramide genennt, wenn ihr Gipfel, wie in der fünften Figur, nicht senkrecht über dem Mittelpuncte ihrer Grundfläche erhaben ist.

XXIX.

Damit man die Art finden möge, wie alle Gattungen der Pyramiden, sowol die geraden, als die schiefen, auszumessen sind, so wollen wir zuvörderst über diese Körper einige allgemeine Betrachtungen anstellen, welche uns die Erkenntniß der Eigenschaften des Prismatis an die Hand giebt.

Wenn man erwäget, daß diejenigen Prismata, die einerley Grundfläche und einerley Höhe haben, einander gleich sind, so wird man sich natürlicher Weise zugleich erinnern, daß auch die Parallelogramma eine gleiche Größe haben, wenn diese Bedingungen bey ihnen zu finden sind, und daß es auch mit den

Triangeln eine gleiche Beschaffenheit hat. Da diese drey Wahrheiten dem Verstande alle zugleich beyfallen, so muß uns die Aehnlichkeit, so man dazwischen bemerket, glaublich machen, daß diejenigen Eigenschaften, welche den Parallelogrammis und den Triangeln gemein sind, auch vielleicht die Prismata, und die Pyramiden in Gemeinschaft angehen. Folglich muß man auf die Vermuthung gerathen, daß Pyramiden, die gleiche Grundflächen und einerley Höhen haben, von gleichem körperlichen Inhalte sind.

XXX.

Diese Vermuthung wird durch folgende Betrachtungen bestätiget. Pyramiden, die gleiche Grundflächen und einerley Höhen haben, sind von gleichem körperlichen Inhalte.

Es seyn ABCDE, abcde,* zwo Pyramiden von gleicher Höhe AH, ah, und deren Grundflächen gleiche und ähnliche Figuren sind, zum Exempel, zwey gleiche Quadrate, BCDE, bcde. Wenn man sich gedenket, es würden diese zwo Pyramiden durch unendlich viel gerade Flächen mit ihren Grundflächen parallel durchschnitten, so wird man sich ohne Mühe vorstellen können, daß diese Pyramiden-Schnitte gleiche Quadrate, IKLM, iklm, geben werden, und daß folglich beyde Pyramiden als Zusammensetzungen einer gleich großen Zahl von Scheiben anzusehen sind, deren jegliche in jedweder Pyramide einer andern Scheibe, die ihr in gleicher Höhe gerade gegenüber stehet, gleich seyn

* 4 u. 5 Fig.

seyn wird. Und hieraus wird man den Schluß machen, daß die Menge der Scheiben von beyden Seiten gleich ist, das heißt, daß diese zwo Pyramiden einerley körperlichen Inhalt haben.

Wären die Grundflächen beyder Pyramiden andere regulaire, oder auch irregulaire
6 u. 7 Fig. Vielecke, BCDEF, bcdef, und diese einander gleich, so würde auch in diesem Falle jedermann sogleich einsehen, daß alle Scheiben IKLMN, iklmn, in beyden Pyramiden einander gleich seyn müßten, und hieraus den Schluß machen, daß Pyramiden von gleichem körperlichen Inhalte sind, wenn sie einerley Grundfläche und einerley Höhe haben.

XXXI.

Alles dieses ist leicht sich vorzustellen, nachdem wir erwiesen haben, daß Prismata von gleichen Höhen und gleichen Grundflächen einander gleich sind. Inzwischen gehöret die Aehnlichkeit zwischen jeglicher Scheibe IKLMN einer Pyramide und deren Grundfläche BCDEF, sowol als die Gleichheit der Scheiben IKLMN und iklmn, zu denen Sätzen, die, obgleich ihre Gewißheit jedermann in die Sinne fällt, dennoch nach geometrischer Schärfe erwiesen werden müssen. Diesen Beweis nun zu finden, ist man genöthiget, über die Aehnlichkeit der körperlichen Figuren verschiedene Betrachtungen anzustellen.

XXXII.

Man nehme wiederum die Pyramide AB-CDEF vor sich, und setze, es geschehe der Durchschnitt vermittelst einer geraden Fläche IKLMN mit der Grundfläche parallel: so werden wir erweisen, daß dieser Durchschnitt, (Section,) so von der durchschneidenden Fläche gebildet wird, ein Vieleck ist, welches dem Vielecke BCDEF der Grundfläche vollkommen ähnlich ist; und daß selbst die Pyramide AIKLMN der Pyramide ABCDEF vollkommen ähnlich ist, das heißt, daß die Winkel, so aus der Neigung aller Linien beyder Figuren entstehen, einander nach ähnlicher Lage gleich sind, und daß alle Seiten der kleinen Pyramide ein gleiches Verhältniß unter einander haben, wie die Seiten der größern. Worinnen die Aehnlichkeit zwoer Pyramiden bestehet.

XXXIII.

Man bemerke zuerst, daß, wenn zwo gerade Flächen, X und Y, mit einander parallel sind, und es gehen zwo gerade Linien, ALD, AME, welche ihren Anfang aus einem gemeinschaftlichen Puncte A nehmen, durch beyde Flächen hindurch, die geraden Linien LM, DE, so zwischen den Puncten L und M, D und E, gezogen werden, parallel seyn müssen. Die Ursache ist, daß, wenn diese Linien nicht parallel wären, dieselben, wenn sie verlängert würden, irgendwo zusammenstoßen müßten. Wofern sie aber zusammenstießen, so würden die Flächen, in denen sie 8 Fig.

liegen,

liegen, und von welchen sie nicht abkommen können, wenn man solche weit genug verlängerte, ebenfalls zusammentreffen; und folglich könnten diese Flächen nicht parallel seyn, welches doch vorausgesetzet wird.

XXXIV.

6 Fig. Setzet man dahero voraus, daß beyde gerade Flächen, IKLMN, und BCDEF, parallel sind, so erfolget daraus, daß alle Linien, ML, LK, KI, IN, NM, mit den anderen Linien ED, DC, CB, BF, FE, parallel sind, und folglich, daß die Triangel ALM, AKL, AIK, ꝛc. den Triangeln ADE, ACD, ABC, ꝛc. gleich seyn müssen. Nimmt man eine Seite dieser Triangel, zum Exempel AM, zum gemeinschaftlichen Maaßstabe aller Seiten der kleineren Pyramide an, die ihr ähnlich liegende Seite AE aber zum Maaßstabe der größeren Pyramide, so wird man ohne Schwierigkeit einsehen, daß die Seiten ML, LK, KI, ꝛc. des Vieleckes IKLMN mit den Seiten ED, DC, CB, ꝛc. des Vieleckes BCDEF proportional seyn müssen.

Eben so leicht wird auch zu sehen seyn, daß alle Winkel IKL, KLM, ꝛc. den Winkeln BCD, CDE, ꝛc. nach ähnlicher Lage gleich seyn müssen: weil die erst benannten aus Linien entstehen, die mit den Seiten der letzten parallel sind. Folglich werden die zwey Vielecke, IKLMN, BCDEF, einander ähnlich seyn.

XXXV.

Weil nun, vermöge der Aehnlichkeit der Triangel ALM und ADE, ALK und ADC, ꝛc. die Seiten AM, AL, AK, ꝛc. mit den Seiten AE, AD, AC, ꝛc. proportional, und die Winkel ALM, ALK, ꝛc. nach ähnlicher Lage, den Winkeln ADE, ADC, ꝛc. gleich sind, so müssen die zwo Pyramiden AIKLMN, ABCDEF, einander vollkommen ähnlich seyn.

XXXVI.

Ziehet man endlich aus dem Puncte A die Linie AH senkrecht auf die verlängerte Fläche des Vieleckes BCDEF, und Q ist derjenige Punct, wo dieser Perpendicul die ebenfalls verlängerte Fläche des Vieleckes IKLMN durchschneidet, so ist klar, daß die geraden Linien AQ, AH, als die Höhen der zwo Pyramiden AIKLMN, ABCDEF, sich unter einander verhalten, wie die ähnlich liegenden Seiten AM, und AE, AL und AD, ꝛc. oder, welches auf eines hinausläuft, daß, wenn man die Höhen AQ, AH, zu Maaßstäben der zwo Pyramiden annimmt, die Seiten AM, AL ꝛc. eben so viel Theile von AQ, als die Seiten AE, AD, ꝛc. Theile von AH in sich halten.

XXXVII.

Nunmehro betrachte man wieder die zwo Pyramiden ABCDEF, abcdef, zusammen, 6 u. 7 Fig.

 so

so wird man finden, daß die zwo Scheiben IKLMN, iklmn, weil sie den zwo gleichen Grundflächen BCDEF, bcdef, ähnlich sind, einander selbst ähnlich seyn müssen. Man wird ferner befinden, daß diese zwo Scheiben einander gleich sind, weil die Maaßstäbe beyder Figuren die geraden Linien AQ, aq, als die Höhen der Pyramiden AIKLMN, aiklmn, einander gleich sind.

Pyramiden, die einerley Höhe und gleiche Grundflächen haben, sind einander gleich.

Ohne demnach zu wissen, wie viel der körperliche Inhalt der Pyramiden beträgt, weiß man schon mit Gewißheit, daß, wenn sie einerley Höhe und einerley Grundfläche haben, sie einander gleich sind, so wie wir es (im XXIX Art.) vermuthet hatten.

XXXVIII.

Auch solche Pyramiden, von einerley Höhe, sind einander gleich, deren Grundflächen zwar keine ähnliche Vielecke, aber doch von gleichem Inhalte sind.

*7 u. 9 Fig.

Wenn die Grundflächen der zwo Pyramiden, anstatt gleich und ähnlich zu seyn, nur ihrem Inhalte nach einander gleich wären, so würden dennoch die Pyramiden in ihrem körperlichen Inhalte einander gleich seyn. Denn man setze, es wären abcdef * und arst zwo Pyramiden von einerley Höhe ah. Durchschneidet man beyde Pyramiden mit einer geraden Fläche, die mit der Grundfläche parallel gehet, so erhellet klar, daß zwischen den Flächen iklmn und bcdef eben dasselbe Verhältniß ist, wie zwischen den Flächen vxy und rst: weil iklmn und bcdef (nach dem XXXIV Art.) ähnliche Figuren sind, und dahero (I Th. XLVIII Art.) nur nach

ihren

ihren Maaßstäben, den Linien aq, ah, unterschieden sind, und weil die gleichfalls ähnlichen Figuren vxy, rst, auch nur nach ihren Maaßstäben, nämlich eben denselben Linien aq, ah, unterschieden sind.

Wenn aber die Grundflächen rst, bcdef, von gleichem Inhalte sind, so müssen ihre proportionalen Theile vxy, iklmn, einander gleich seyn. Folglich sind alle gleich hoch liegende Scheiben in beyden Pyramiden arst, abcdef, von gleicher Größe. Folglich sind auch die Zusammensetzungen dieser Scheiben, die Pyramiden selbst, nach ihrem körperlichen Inhalte einander gleich.

XXXIX.

Wenn die Grundfläche bcdef der ersten Pyramide die Grundfläche rst der zweyten gewissemal in sich hielte, so betrüge der körperliche Inhalt der ersten, abcdef, eben so vielmal mehr, als der körperliche Inhalt der zweyten, arst.

Pyramiden, die einerley Höhe haben, verhalten sich untereinander wie ihre Grundflächen.

Denn wenn auf solchen Fall die Grundfläche bcdef in eine gewisse Anzahl Theile getheilet würde, deren jedwedes der Grundfläche rst gleich wäre, so könnte man sich gedenken, als ob die Pyramide abcdef aus eben so viel anderen Pyramiden zusammengesetzet wäre, die diese Theile von bcdef zu ihren Grundflächen hätten. Nun wäre aber eine jegliche dieser neuen Pyramiden, so wie im vorigen Artikel erwiesen worden, der Py-

ramide arst gleich: folglich betrüge der körperliche Inhalt der Pyramide abcdef so vielmal mehr, als der Inhalt der Pyramide arst, so vielmal die Grundfläche der ersten die Grundfläche der zweyten in sich hielte.

Wenn die Grundfläche rst in der Grundfläche bcdef nicht völlig enthalten wäre, und es könnten doch beyde nach einem gemeinschaftlichen Maaße X ausgemessen werden, so theilte man jegliche dieser zwo Grundflächen bcdef, rst, in Theile, welche X gleich wären, und so würde man befinden, daß die zwo Pyramiden abcdef, arst, aus eben so vielen neuen, einander insgesammt gleichen Pyramiden bestehen würden, als die zwo Grundflächen Theile X enthielten. Folglich verhielten sich die Pyramiden abcdef, arst, unter einander, wie ihre Grundflächen.

Und obgleich die Grundflächen incommensurabel wären, so könnte man dem ungeachtet darthun, daß die Pyramiden ein gleiches Verhältniß, wie ihre Grundflächen, unter einander haben; und dieses durch solche Schlüsse, dergleichen wir uns in einem ähnlichen Falle (II Th. XXVIII Art.) bedienet haben, als wir diejenigen Figuren verglichen, deren Seiten incommensurabel sind, nämlich: man vermindert das Maaß X unendlich, so daß es für ein gemeinschaftliches Maaß beyder Grundflächen, rst und bcdef, angenommen werden kann.

XL.

Nachdem man erfunden hat, daß Pyramiden von gleicher Höhe sich unter einander wie ihre Grundflächen verhalten, so wird man spüren, daß die Ausmessung ihres körperlichen Inhaltes nur noch wenigen Schwierigkeiten unterworfen ist.

Denn es kommt allein darauf an, eine einzige Pyramide messen zu lernen, um alle andere zu messen. Man setze, zum Exempel, man wüßte die Pyramide ABCDE zu messen, und man verlangte das Maaß der Pyramide ASTVXY, die weder einerley Grundfläche, noch einerley Höhe, mit jener hat. Man macht zuerst eine Pyramide, welche der Pyramide ABCDE ähnlich ist, und die Höhe der andern Pyramide ASTVXY hat. Dieses ist leicht zu verrichten: denn man verlängert (XXXV Art.) die Seiten AB, AC, AD, AE, und durchschneidet dieselben mit der geraden Fläche LMNO, deren Abstand AG vom Puncte A der Höhe AQ gleich seyn muß. 10 u. 11 Fig.

Weil wir nun, wie vorausgesetzet wird, die Pyramide ABCDE zu messen wissen, so ist klar, daß wir auch die ihr ähnliche Pyramide ALMNO werden messen können. Denn was wir auch immer gethan hätten, um das Maaß der Pyramide ABCDE zu finden, eben dasselbe könnte man auch thun, um die ihr ähnliche Pyramide ALMNO

zu messen, ausgenommen, daß man bey dieser einen andern Maaßstab brauchen müßte.

Man setze demnach, es sey die Pyramide ALMNO gemessen, so bestimmet ihr Maaß auch das Maaß der gegebenen Pyramide ASTVXY. Denn nach dem vorhergehenden Artikel verhalten sich diese zwo Pyramiden unter einander, wie ihre Grundflächen LMNO, STVXY; und wir haben auch überdieß im zweyten Theile dieses Werkes gezeiget, wie das Verhältniß dieser zwo Grundflächen zu finden ist.

XLI.

Weil man demnach, um alle mögliche Pyramiden ausmessen zu können, nur eine einzige darf ausmessen lernen, so wollen wir eine ganz einfache vor uns nehmen, welche man machen kann, wenn man aus den vier Winkeln A,
12 Fig. B, C, H einer Seitenfläche eines Würfels ABCDEFGH, nach dem Puncte O, als dem Mittelpuncte des Würfels, welcher von A, D, B, E rc. in gleicher Weite entfernet ist, vier Linien AO, BO, CO, HO, ziehet.

Man siehet ohne Schwierigkeit ein, daß diese Pyramide der sechste Theil des Würfels ist, weil, wenn jedwede Seitenfläche zur Grundfläche angenommen wird, man den Würfel in sechs dergleichen Pyramiden zerlegen kann. Nun ist aber der körperliche Inhalt des Würfels das Product der Höhe AF durch die Grundfläche ABCH. Folglich, wenn man den körperlichen Inhalt der Pyramide verlanget,

get, so muß man das Product von AF durch ABCH in sechs gleiche Theile theilen; oder, welches auf eines hinausläuft, man multipliciret den sechsten Theil der Höhe AF durch die Grundfläche ABCH. Und weil der sechste Theil der Höhe AF den dritten Theil der Höhe OL der Pyramide OABCH beträgt, immaßen diese Höhe OL die Hälfte der Seite des Würfels ist, so erfolget daraus, daß das Maaß der Pyramide OABCH das Product des dritten Theils ihrer Höhe durch ihre Grundfläche ist.

XLII.

Nunmehro setze man, man solle eine Pyramide, welche es auch sey, zum Exempel OKMNSTV, messen; so gedenket man sich einen Würfel (12 Fig.) dessen Seite AB, oder AF, doppelt so lang, als die Höhe OL der gegebenen Pyramide, wäre. In diesem Würfel gedenket man sich ferner eine Pyramide, wie OABCH, deren Spitze im Mittelpuncte des Würfels läge, und welche zu ihrer Grundfläche eine der Seitenflächen ABCH des Würfels hätte. Diese neue Pyramide wird einerley Höhe mit der ersten haben; und folglich (XXXIX Art.) wird der körperliche Inhalt von OABCH sich zu dem von OKMNSTV verhalten, wie die Grundfläche ABCH zur Grundfläche KMNSTV. Nun ist aber, nach dem vorhergehenden Artikel, das Product des dritten Theils der gemeinschaftlichen Höhe OL, durch die Grundfläche ABCH, der körperliche 13 Fig.

Inhalt der Pyramide OABCH: folglich ist das Product des dritten Theils derselben Höhe OL, durch die Grundfläche KMNSTV, der körperliche Inhalt der gegebenen Pyramide OKMNSTV.

Der körperliche Inhalt einer jeglichen Pyramide ist das Product ihrer Grundfläche durch den dritten Theil ihrer Höhe.

Und hierdurch erfindet man den allgemeinen Lehrsatz, daß eine Pyramide zu ihrem Maaße das Product ihrer Grundfläche durch den dritten Theil ihrer Höhe hat.

XLIII.

Die Pyramide ist der dritte Theil eines Prismatis, welches mit ihr eine gleiche Grundfläche und einerley Höhe hat.

Da wir (im XXI Art.) gesehen haben, daß der körperliche Inhalt des Prismatis das Product seiner Grundfläche durch seine Höhe ist, so wird aus dem vorhergehenden Artikel klar, daß eine Pyramide allezeit der dritte Theil eines Prismatis ist, welches mit ihr eine gleiche Grundfläche und einerley Höhe hat.

XLIV.

Nachdem wir alle Körper, die von geraden Flächen eingeschlossen werden, gemessen haben, so untersuchen wir nunmehr, durch welche Mittel und Wege man zur Ausmessung derjenigen Körper, welche krumme Oberflächen haben, hat gelangen können. Und da wir im dritten Theile nur von solchen Figuren gehandelt haben, deren Umfang keine anderen krummen Linien, als Circulförmige, in sich schließet, so wollen wir auch hier nur solche Körper untersuchen, deren Krümmen Circulförmig sind.

Bey

Bey dieser Untersuchung werden wir uns weyerley vorsetzen müssen, nämlich, das Maaß ihrer Oberflächen, und das Maaß ihres körperlichen Inhaltes. Denn weil diese Oberflächen entweder ganz krumm, oder auch nur zum Theil krumm, zum Theil gerade sind, so können wir deren Maaß nicht aus dem ersten Theile herleiten, wie wir bey denen, mit geraden Flächen umschlossenen Körpern gethan haben.

XLV.

XIII Taf. 1 u. 2 Fig.

Der Cylinder ist ein Körper, welcher von zweenen einander gegenüber stehenden und parallelen Circuln, und von einer um deren Umkreise gebogenen Fläche eingeschlossen ist.

Der einfacheste unter allen krummen Körpern ist der Cylinder, oder die Walze. Es ist ein Körper, wie ABCDEF, dessen zwo Grundflächen ABC, DEF, zween gleiche und parallele Circul sind, die eine krumme Oberfläche zusammen verbindet; und diese Oberfläche kann man sich gedenken, als entstünde sie aus einer geraden Fläche, welche um die Umkreise der Grundflächen gebogen würde.

1 Fig.

Unterschied zwischen dem geradstehenden und dem schiefen Cylinder.

Wenn beyde Circul so gestellet sind, daß der Mittelpunct G des ersten über dem Mittelpuncte H des andern senkrecht stehet, so heißt es eine geradstehende Walze.

2 Fig.

Im Gegentheile heißt es eine schiefstehende Walze, wenn die durch die Mittelpuncte G und H gezogene Linie, in Ansehung der Flächen ABC und DEF, schief stehet.

XLVI.

Wie ein Cylinder entstehet.

Der geometrische Ursprung dieser Körper, welcher mit dem (im XVII Art.) erkläreten

Ursprunge des Prismatis und des Parallelepipedi eine Aehnlichkeit hat, ist, wenn ein Circul, mit sich selbst parallel bleibend, sich dergestalt beweget, daß alle Puncte desselben gerade Parallel-Linien beschreiben, welche sich über die Fläche dieses Circuls erheben.

XLVII.

Die krumme Oberfläche einer geradstehenden Walze auszumessen, wie in der Ausübung oft erfordert wird, werden wir auf folgende Art lernen.

1 Fig. Man theile die zween Umkreise ABC, DEF, jedweden in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, und zwar so, daß die Theilungspuncte senkrecht über einander stehen, und ziehe zwischen jeglichen zweenen Puncten eines jeden Circuls eine gerade Linie, wodurch man die Winkel zweyer über einander stehender regulairer Vielecke bekommt. Es ist klar, daß auf solche Weise ein Prisma entstehet, dessen Oberfläche aus so vielen in der Oberfläche der Walze versteckten Rectangeln bestehet, als in jeglichem der Umkreise ABC, DEF, Seiten derer in ihnen beschriebenen Vielecke befindlich sind. Weil nun die Höhen aller dieser Rectangel der Höhe AD gleich sind, so wird das ganze Maaß dieser Rectangel das Product der Höhe AD durch die Summe aller Grundlinien seyn, das heißt, durch den Umfang des in dem Circul DEF, oder ABC, beschriebenen Vieleckes.

Weil nun, je größer die Anzahl der Seiten dieses Vieleckes ist, der Umfang desselben dem Um-

Umkreise, die Oberfläche aber des Prismatis der Walze ihrer immer gleicher wird, so erfolget hieraus, daß, wenn man sich eine unendliche Anzahl Seiten dieses Vieleckes gedenket, das Prisma von der Walze nicht mehr unterschieden seyn wird. Folglich ist die krumme Oberfläche der geradstehenden Walze einem Rectangel gleich, dessen Höhe AD ist, die Grundlinie aber eine gerade Linie, welche so lang, als der Umkreis DEF, oder ABC, ist.

Die krumme Oberfläche eines geradstehenden Cylinders ist einem Rectangel gleich, welches einerley Höhe mit dem Cylinder hat, und dessen Grundlinie dem Umkreise des Cylinders gleich ist.

Dieser Satz hat seinen Nutzen, wenn man, zum Exempel, wissen will, wie viel Zeug erfordert werde, um einen Walzenförmigen Pfeiler zu bekleiden, oder einen runden Saal zu tapeziren; u. d. m.

XLVIII.

Was die Oberfläche der schiefstehenden Walze betrifft, so läßt sich selbige nicht auf diese Art ausmessen, weil man, anstatt der Rectangel, Parallelogramma von unterschiedenen Höhen bekäme. Bloß durch sehr weitläuftige und schwere Methoden hat man es dahin gebracht, ihren Inhalt, und auch diesen nicht nach der Schärfe, sondern nur beynahe, zu finden. Aber dergleichen Aufgaben sind für Anfangsgründe allzu hoch.

XLIX.

Anlangend hingegen den körperlichen Inhalt sowol der geradstehenden, als der schiefen Walze, so ist nichts leichter, als solchen zu finden. Denn es erhellet klar, daß alles, was

wir von dem Prismate gezeiget haben, auch von der Walze gelten muß, wenn man diese als ein Prisma betrachtet, das mit so vielen Seitenflächen, als möglich ist, in ihr beschrieben würde.

Die Cylinder, welche gleiche Grundflächen und einerley Höhen haben, sind ihrem körperlichen Inhalte nach einander gleich.

Derowegen sind die Walzen nach ihrem körperlichen Inhalte einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben.

L.

Der körperliche Inhalt eines jedweden Cylinders ist das Product seiner Grundfläche durch seine Höhe.

Und das Maaß einer jedweden Walze bestehet in dem Producte ihrer Grundfläche durch ihre Höhe.

LI.

3 u. 4 Fig. Der Kegel ist eine Art von Pyramiden, deren Grundfläche ein Circul ist.

Nach der Walze ist der einfacheste krumme Körper der Kegel; (Conus.) Dieses ist eine Figur, wie ABCDE, deren Grundfläche ein Circul ist, und deren Oberfläche aus unendlich vielen geraden Linien bestehet, die alle von dem Gipfel A bis an den Umkreis BCDE des Circuls reichen. Man kann diesen Körper als eine Pyramide betrachten, deren Grundfläche ein Circul wäre.

LII.

Unterschied zwischen dem geradstehenden und dem schiefen Kegel.

Wenn die Spitze, oder der Gipfel, A des Kegels, (wie in der 3ten Figur) senkrecht über dem Mittelpuncte O der Grundfläche erhaben ist, so heißt er ein geradstehender Kegel; und hin-

hingegen ein schiefer Kegel, wenn dessen Gipfel (wie in der 4ten Figur) über einem andern Puncte, in oder außer der Grundfläche, stehet.

LIII.

Will man die krumme Oberfläche eines geradstehenden Kegels ABCDE ausmessen, so betrachtet man ihn als eine Pyramide, die mit so vielen Seitenflächen, als möglich ist, in ihm beschrieben würde; nämlich, man theilet den Umkreis seiner Grundfläche BCDE, so wie man es mit dem Umkreise der Walze that, in unendlich viel gleiche Seiten. Wenn man alsdenn aus allen dadurch entstehenden Winkeln nach dem Gipfel A des Kegels gerade Linien ziehet, so findet man, daß die krumme Oberfläche des Kegels eine Zusammensetzung von unendlichen kleinen gleichschenkelichten Triangeln ist, deren Höhen der Seite AB des Kegels gleich sind, und deren Grundlinien zusammengenommen, so lang sind, als der Umkreis BCDE. Hieraus ist leicht zu erkennen, daß man das Maaß dieser krummen Oberfläche des Kegels findet, wenn man die Hälfte von AB durch den Umkreis BCDE multipliciret.

3 Fig.

Der Inhalt der krummen Oberfläche eines geradstehenden Kegels ist das Product der Hälfte seiner Seite durch den Umkreis seiner Grundfläche.

LIV.

Erinnert man sich nunmehr, daß die Oberfläche eines Ausschnittes dieses Circuls (III Th. X Art.) gleich ist dem Producte des Bogens dieses Ausschnittes durch die Hälfte des Strahles, so siehet man, daß, wenn man den

gerad-

Die krumme Oberfläche eines Kegels, wenn sie in eine gerade Fläche gebracht wird, hat die Figur eines Circul-Ausschnittes.

geradstehenden Kegel ABCDE mit einer biegsamen Oberfläche, zum Exempel mit Papier, umwickeln wollte, ein Circul-Ausschnitt erfordert würde, dessen Strahl der Seite AB gliche, und dessen Bogen so lang, als der Umkreis BCDE, wäre.

LV.

Wenn der Kegel schief stehet, so ist der Inhalt seiner Oberfläche sowol, als bey der schiefstehenden Walze, wenn es auch nur beynahe seyn soll, sehr schwer zu finden; und es ist auch diese Aufgabe für Anfangsgründe zu hoch.

LVI.

Was den körperlichen Inhalt sowol der geradstehenden, als der schiefen Kegel betrifft, so betrachtet man diese Körper als Pyramiden, die mit so vielen Seiten, als möglich ist, in ihnen beschrieben würden. Alsdenn kann man, zufolge dessen, was von den Pyramiden überhaupt ist gezeigt worden, die Anwendung auf sie machen.

Kegel, so gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind nach ihrem körperlichen Inhalte einander gleich.

Derowegen sind diejenigen Kegel, so gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, nach ihrem körperlichen Inhalte einander gleich.

LVII.

Der körperliche Inhalt eines jeglichen Kegels

Und der körperliche Inhalt eines jeglichen Kegels ist das Product seiner Grundfläche durch den dritten Theil seiner Höhe.

LVIII.

LVIII.

Man hat zuweilen nöthig, einen Körper, wie BCDEFGH, zu messen, welcher ein abgekürzter Kegel genennt wird. Es ist das übrigbleibende Stück eines Kegels AFGH, nachdem man, vermittelst eines mit der Grundfläche FGH parallel gehenden Durchschnittes, einen kleineren Kegel ABCDE von ihm abgeschnitten. Es ist klar, daß das Maaß dieses Körpers der Unterschied zwischen dem körperlichen Inhalte der zween Kegel ABCDE und AFGH seyn wird. ist das Product seiner Grundfläche durch den dritten Theil seiner Höhe. 5 u. 6 Fig.

LIX.

Betreffend die Oberfläche des abgekürzten Kegels, welcher vermittelst eines Durchschnittes aus einem geradstehenden Kegel entstehet, so findet man dieselbe auf eine viel leichtere Art, als wenn man die Oberflächen der beyden Kegel, jedwede besonders, mäße, und eine von der andern abzöge. Man bedienet sich hierzu folgender Methode, die, wenn man dasjenige weiß, was im LIV Artikel gezeigt worden, leicht zu begreifen ist.

Man nehme an, es sey ALR der Circul-Ausschnitt, mit welchem sich der Kegel AFGH bekleiden ließe. 6 u. 7 Fig. Beschreibet man aus dem Mittelpuncte A, und mit der Weite AM, welche AB gleich ist, einen Bogen MP, so erkennet man, daß der Raum MPRL ein Stück eines Ringes ist, womit die gesuchte Oberfläche des abgekürzten Kegels bekleidet werden

kann.

kann. Wenn man sich nun gedenket, als würden die zween Umkreise der Circul, von welchen MP und LR ähnliche Bögen sind, völlig ausgezogen, so bekommt man einen ganzen Ring, dessen Maaß (III Th. VIII Art.) das Product von ML, (gleich BF,) durch den Umkreis, dessen Strahl AN ist, seyn wird, weil N das Mittel von ML ist. Folglich ergiebt sich das Maaß des Ringstückes MPRL, oder der Oberfläche des abgekürzten Kegels BCDEFGH, welches jenem gleich ist, wenn man ML durch den Bogen NQ multipliciret, oder, welches einerley ist, wenn man des gegebenen Körpers Seite BF durch den Umkreis IKL, welcher sich durch einen mit der Grundfläche parallelen, und aus I, als dem Mittel der Seite BF, gemachten Durchschnitt bildet, multipliciret.

Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels zu messen.

LX.

Die Kugel ist derjenige Körper, in dessen Oberfläche alle Puncte von seinem Mittelpuncte gleich weit entfernet sind.

Der letzte Körper, von welchem wir handeln wollen, ist die Kugel; (Sphæra.) Es ist derjenige Körper, in dessen Oberfläche alle Puncte von einem einzigen innersten Puncte, welches der Mittelpunct ist, in gleicher Weite entfernet sind. Man hat oftmals nöthig, die Oberflächen der Kugeln zu messen, zum Exempel, wenn man zu wissen verlanget, wie viel man Gold brauchen werde, eine Kugel zu vergolden, oder wie viel bleyerne Tafeln erfordert werden, ein Helmdach auf einem Gebäude zu decken; u. d. m.

LXI.

LXI.

Es sey X diejenige Kugel, deren Oberfläche 8 Fig.
an ausmessen will. Es ist klar, daß man
h diesen Körper so gedenken kann, als ent-
inde er aus einem halben Circul A M B,
elcher sich um seinen Diameter drehet.

Die Kugel entstehet, wenn sich ein halber Circul um seinen Diameter drehet.

Man setze anfangs, man hätte, anstatt
eses halben Circuls, ein regulaires Vieleck
n einer unendlichen Anzahl, oder auch von
ier sehr großen Menge kleiner Seiten; und
an nähme sich vor, nur die Oberfläche Z,
elche aus dem Umdrehen dieses Circuls ent- 9 Fig.
het, auszumessen. Denn hernach wird es
cht seyn, wenn die Oberfläche gemessen ist,
s Maaß der Oberfläche der ganzen Kugel
finden, so wie wir durch die Ausmessung
r geradlinichten Figuren das Maaß des
rculs gefunden haben.

LXII.

Die Oberfläche des Körpers Z zu messen,
tersuche man das kleine Theil dieser Ober-
iche, welches eine einzige Seite, z. E. Mm,
s in ihr beschriebenen Vieleckes, indem sie
h um den Diameter AB drehet, hervorbrin-
t. Es ist klar, daß diese Seite Mm, in-
m sie die gedachte Bewegung macht, die
berfläche eines abgekürzten Kegels V be-
reibet. Denn wenn man die gerade Linie XIV Taf.
lm verlängert, bis sie in T den Diameter, 1 Fig.
ier die Axe der Umdrehung, AB, erreichet,
nd es drehet sich diese verlängerte Linie TMm

in gleicher Zeit mit dem halben Circul AMB, so beschreibet sie, wie selbst der Augenschein lehret, einen geradstehenden Kegel, dessen Gipfel T ist, die Grundfläche aber der von dem Puncte m beschriebene Circul: daß folglich die aus der Bewegung der Seite Mm entstehende Oberfläche V eine Scheibe dieses Kegels seyn wird, die zwischen den Flächen der zweenen, durch das Umdrehen der Puncte M und m beschriebenen Circul eingeschlossen ist. Nun ist aber, wie man (im LIX Art.) gesehen hat, die Oberfläche V einem Rectangel gleich, dessen Höhe Mm ist, die Grundlinie aber eine Linie, welche dem, durch den Punct K, das Mittel von Mm, beschriebenen Circul KLO gleich ist. Folglich ist die aus dem Umdrehen des Vieleckes entstandene Oberfläche gleich der Summe so vieler Rectangel von dieser Art, als in dem Vielecke Seiten, wie Mm, enthalten sind.

Weil nun alle Seiten, wie Mm, als die Höhen dieser Rectangel, von gleicher Länge zu seyn, vorausgesetzet werden, so kann man die gesuchte Oberfläche als ein summarisches Rectangel betrachten, dessen Höhe Mm ist, und dessen Grundlinie der Summe aller Umkreise, wie KL, gleich ist, das heißt, aller derer, die durch den mittelsten Punct einer jeglichen von diesen kleinen Seiten beschrieben werden können.

Weil aber das in dem halben Circul AMB beschriebene Vieleck eine große Menge Seiten hat,

hat, so wird die Höhe Mm dermaßen klein, die Grundlinie aber so unmäßig lang, daß dieses Rectangel unmöglich beschrieben werden kann.

Diesem Hindernisse abzuhelfen, fällt es der Einbildungskraft nicht schwer, alle diese kleine Rectangel in andere, die noch immer eine gleiche Höhe haben, zu verwandeln, welche Höhe aber nicht unmerklich klein, wie Mm, sondern groß genug ist, daß jegliche Grundlinie eine ganz kleine Länge bekomme. Vermittelst dessen wird aus der Zusammensetzung aller dieser kleinen Grundlinien eine Länge entstehen, die mit der Höhe verglichen werden kann.

LXIII.

Man versuche dahero, ob man vielleicht auf solche Weise diese kleinen Rectangel in andere verwandeln könne. Man setze zuvörderst, um die Aufgabe ganz einfach zu machen, es hätten diese Rectangel, anstatt Linien, die so lang, als die Umkreise KL sind, zu Grundlinien zu haben, nur die Strahlen KI dieser Umkreise zu Grundlinien: so wird es hernach nicht schwer seyn, das, was wir für diese neuen Rectangel finden werden, auf diejenigen anzuwenden, mit denen wir eigentlich beschäfftiget sind. 2 Fig.

Es kömmt also darauf an, ein Rectangel zu finden, dessen Inhalt das Product von Mm durch KI sey, und welches zu seiner Höhe eine Linie habe, die ungleich länger, als Mm, und überdies an allen Oertern, wo diese kleine

Seite Mm liegt, von gleicher Länge sey. Hierzu nun wähle man, zum Exempel, die gerade Linie CK, welche das Apothema des Vieleckes ist, wovon Mm eine Seite ist, und welche folglich überall eine gleiche Länge hat, sie gehöre zu welcher Seite des Vielleckes als sie wolle. Wir müssen dahero eine Linie suchen, deren Product durch CK dem Producte von KI durch Mm gleich sey, das heißt, (II Th. VII Art.) die vierte Proportional-Linie zu den drey Linien KC, KI, Mm. Nun wissen wir aber, daß man in den Figuren die Proportional-Linien vermittelst ähnlicher Triangel findet: folglich muß man ähnliche Triangel beschreiben, deren ähnlich liegende Seiten die verlangten Linien sind; und dieß geschieht, wenn man MR auf mp senkrecht ziehet. Hierdurch bekommt man die Triangel MmR, KIC, welche einander ähnlich sind, weil beyde, einer bey R, der andere bey I, recht winkelicht sind, und weil auch überdies ihre Winkel mMR, IKC, einander gleich sind: denn der erste macht, nebst dem Winkel MmR, welcher MKI gleich ist, einen rechten Winkel, und der letzte IKC macht, nebst MKI, ebenfalls einen rechten Winkel.

Hieraus ist es leicht den Schluß zu machen, daß KC zu KI ist, wie Mm zu MR, das heißt, daß MR die gesuchte vierte Proportional-Linie ist; oder, welches auf eins hinausläuft, daß das Rectangel von KC durch

MR,

MR, oder auch durch Pp, dem Rectangel von Mm durch KI gleich ist.

Weil aber das zu verwandelnde Rectangel nicht dasjenige war, welches Mm durch KI giebt, sondern welches aus Mm durch den Umkreis, dessen Strahl KI ist, entstehet; so müssen wir uns nunmehr erinnern, daß die Umkreise sich unter einander verhalten, wie ihre Strahlen: welches Ursache ist, daß die Gleichheit zwischen dem Rectangel aus Mm durch KI, und dem aus Pp durch CK, nothwendig nach sich ziehet, daß das Rectangel aus Mm durch den Umkreis von KI, dem Rectangel aus Pp durch den Umkreis von CK gleich ist. Denn es ist leicht zu begreifen, daß, wenn zwey Rectangel einander gleich sind, und man läßt ihnen ihre Höhen unverändert, vergrößert aber ihre Grundlinien nach gleichem Verhältnisse, dieselben Rectangel einander gleich bleiben werden.

LXIV.

Nachdem wir in den vorhergehenden zweenen Artikeln gefunden haben, daß alle die kleinen Oberflächen abgekürzter Kegel, wie V, (1 Fig.) gleich sind eben so vielen Rectangeln, deren gemeinschaftliche Höhe eine dem Umkreise des Strahles KC gleiche gerade Linie ist, und deren jegliches zur Grundlinie eine kleine gerade Linie, wie Pp, hat, welche mit jeglicher Seite, wie Mm, zusammen trifft: so läßt sich hieraus der Schluß machen, daß

jegliche Summe dieser kleinen Oberflächen, z. E. von A an bis nach p, einem Rectangel gleich sey, welches zur Höhe eine dem Umkreise des Strahles CK gleiche gerade Linie hätte, zur Grundlinie aber die Summe aller Linien, wie Pp von A an bis nach p, das heißt, die gerade Linie Ap.

Um nun die aus der Umdrehung des ganzen Vieleckes entstehende ganze Oberfläche zu bekommen, muß man ein Rectangel machen, dessen Grundlinie dem vom Strahle CK beschriebenen Umkreise gleich ist, und welches eine dem Diameter AB gleiche Höhe hat.

LXV.

Nunmehr ist es ganz leicht, die Oberfläche der Kugel auszumessen. Denn es erhellet klar, daß, je mehr Seiten das Vieleck hat, desto mehr die körperliche Figur, so aus dessen Umdrehung entstehet, der Kugel gleich wird, und desto mehr auch das Apothema CK eine gleiche Länge mit dem Strahle bekommt: so daß, wenn man sich gedenket, es sey das Vieleck ein Circul geworden, das Apothema CK der Strahl selbst wird, die Kugelfläche aber eben denselben Inhalt bekommt, wie ein Rectangel, welches zu seiner Höhe den Diameter hätte, und zur Grundlinie eine gerade Linie, die so lang wäre, als der Umkreis des Circuls, welcher die Kugelfläche hervorgebracht, und welchen man insgemein den größten Circul der Kugel nennet.

Die Oberfläche der Kugel hat zum Maaße das Product ihres Diameters durch den Umkreis ihres größten Circuls.

LXVI.

LXVI.

Betreffend die krumme Oberfläche eines Kugel-Abschnittes AMLNO, das heißt, eines Stückes der Kugel, welches durch eine gerade Fläche MLNO, die mit einem Diameter senkrecht gehet, abgeschnitten wird: so hat dieselbe zu ihrem Maaße das Product ihrer Dicke, das heißt, des Stückes AP des Diameters, durch den Umkreis des größten Circuls AMBN. Es gründet sich solches auf den Beweis, durch welchen wir dargethan haben, (LXIV Art.) daß die Summe der Oberflächen aller kleinen abgekürzten Kegel, von A an bis nach m, einem Rectangel gleich ist, welches zur Höhe Ap hat, und zur Grundlinie eine Linie, die so lang ist, als der Umkreis des Circuls, dessen Strahl CK ist.

Was ein Kugel-Abschnitt ist. 3 Fig.

Wie man dessen Oberfläche ausmisset.

2 Fig.

LXVII.

Das vorhin angezeigte Maaß der Kugelfläche lehret uns, daß, wenn sich das Rectangel ABDE mit dem halben Circul AMNB in gleicher Zeit um AB drehet, die krumme Oberfläche der geradstehenden Walze EFGIKDH, welche aus der Umdrehung dieses Rectangels entstehet, der Oberfläche der von dem halben Circul beschriebenen Kugel gleich ist; welches insgemein also ausgedrücket wird: Die Oberfläche der Kugel ist gleich der krummen Oberfläche der um sie beschriebenen Walze.

4 Fig.

Die Oberfläche der Kugel ist gleich der krummen Oberfläche des um die Kugel beschriebenen Cylinders.

LXVIII.

Die Scheiben der Kugel und des um sie beschriebenen Cylinders sind, nach ihren krummen Oberflächen, einander gleich.

Und wenn man sowol die Walze, als die Kugel, mit zwo beliebigen, auf dem Diameter AB senkrecht stehenden geraden Flächen in P und in Q durchschneidet, so sind die Scheiben der Kugel und der Walze, die aus der Bewegung der geraden Linie OS und des Bogens MN entstehen, nach ihren krummen Oberflächen einander gleich.

LXIX.

Die Oberfläche der Kugel ist gleich der Fläche ihres größten Circuls, viermal genommen.

Man ersiehet ferner aus dem Vorhergehenden, daß die Oberfläche der Kugel viermal so groß ist, als die Fläche ihres größten Circuls. Denn der Inhalt des größten Circuls ist das Product aus der Hälfte des Strahles, oder dem vierten Theile des Diameters, durch den Umkreis; und der Inhalt der Kugelfläche ist das Product des ganzen Diameters durch denselben Umkreis.

LXX.

Der körperliche Inhalt

Nachdem man die Oberfläche der Kugel gefunden hat, so ist es sehr leicht, ihren körperlichen Inhalt zu finden. Denn man kann die Kugel betrachten, als bestünde sie aus unendlich vielen kleinen Pyramiden, deren Gipfel an ihrem Mittelpuncte lägen, und deren sämmtliche Grundflächen die ganze Kugelfläche bedeckten. Weil nun jegliche dieser Pyramiden zu ihrem Maaße das Product des dritten Theils ihrer Höhe, nämlich des Strahles,

les, durch ihre Grundfläche hat, so findet man deren ganze Summe, oder den körperlichen Inhalt der Kugel, wenn man den dritten Theil des Strahles durch ihre Oberfläche, das heißt, durch die Fläche ihres größten Circuls, viermal genommen, multipliciret.

der Kugel ist das Product des dritten Theils des Strahles durch die Fläche ihres größten Circuls, viermal genommen.

LXXI.

Weil das Product des dritten Theils des Strahles durch die Fläche des größten Circuls, viermal genommen, eben dasselbe ist, wie das Product des dritten Theils des Strahles, viermal genommen, das heißt, zweyer Drittel des Diameters, durch die Fläche des größten Circuls; der körperliche Inhalt der Walze EFGIKDH aber zum Maaße hat das Product des Diameters durch eben dieselbe Fläche des größten Circuls, welcher der Walze zur Grundfläche dienet: so erfolget daraus, daß der körperliche Inhalt der Kugel zwey Drittel des körperlichen Inhaltes der um sie beschriebenen Walze beträgt.

Der körperliche Inhalt der Kugel beträgt zwey Drittel vom körperlichen Inhalte des um sie beschriebenen Cylinders.

LXXII.

Verlangte man den körperlichen Inhalt eines Kugel-Abschnittes AMLNO * zu wissen, so ist klar zu sehen, daß man zuerst dasjenige Stück der Kugel messen müßte, welches aus dem Umdrehen des Circul-Ausschnittes CAM entstehet; und dieses geschieht, wenn man den dritten Theil des Strahles durch die Oberfläche des gegebenen Kugel-Ab-

Den körperlichen Inhalt eines Kugel-Abschnittes zu finden.

* 3 Fig.

schnittes AMLNO multipliciret. Alsdenn ziehet man von diesem Maaße das Maaß des Kegels ab, welcher aus dem Umdrehen des Triangels CPM entstehet: (ich meyne denjenigen Kegel, dessen Grundfläche der Circul MLNO, die Höhe aber CP ist) so ist der Ueberrest der gesuchte körperliche Inhalt des Kugel-Abschnittes.

LXXIII.

Wir beschließen diese Anfangsgründe mit etlichen Lehrsätzen von dem körperlichen Inhalte und von der Oberfläche ähnlicher Körper. Es ergeben sich diese Sätze ganz ungezwungen, wenn man nachdenket, worinnen die Aehnlichkeit zweener Körper bestehet. Ja, man kann fast nicht fehlen, dieselben zu erfinden, wenn man sich erinnert, was wir (im I Th. XXXIV u. f. Art.) von der Aehnlichkeit unkörperlicher Figuren, ich meyne solcher, die auf geraden Flächen beschrieben werden, gezeiget haben.

Worinnen die Aehnlichkeit zweener Körper bestehet, welche in gerade Flächen eingeschlossen sind.

Wir haben (im XXXII Art.) vestgestellet, worinnen die Aehnlichkeit zwoer Pyramiden bestehe. Die damals gegebene Erklärung ähnlicher Pyramiden erstrecket sich auf alle Körper, die von geraden Flächen umschlossen werden, nämlich: Zween Körper von dieser Beschaffenheit sind ähnlich zu nennen, wenn alle Winkel, die aus den Seiten des einen entstehen, mit denen aus den Seiten des andern entstehenden Winkeln von gleicher Größe sind, und wenn die Seiten eines dieser Kör-

per

per mit den ähnlich liegenden Seiten des andern proportional sind.

LXXIV.

Was diejenigen Körper betrifft, die nicht überall von geraden Flächen umgeben sind, zum Exempel, die Walzen und die Kegel: so ist es ebenfalls leicht, die nothwendigen Bedingungen, um sie ähnlich zu machen, zu bestimmen.

Bedingungen, wodurch die Aehnlichkeit zweener geradstehender Cylinder bestimmet wird.

Zwo geradstehende Walzen sind einander ähnlich, wenn ihre Höhen eben dasselbe Verhältniß unter einander haben, wie die Strahlen ihrer Grundflächen.

LXXV.

Aehnlichkeit zweener schiefen Cylinder.

Wenn die Walzen schief stehen, so wird noch überdies erfordert, daß die Linie, welche in jeglicher Walze durch die Mittelpuncte beyder Grundflächen gezogen wird, einerley Winkel mit diesen Grundflächen mache.

LXXVI.

Aehnlichkeit zweener Kegel.

Diese Erklärungen schicken sich auch auf die Kegel, wofern man anstatt der Linie, so durch die Mittelpuncte der Grundflächen der Walze gehet, diejenige setzet, die aus dem Gipfel des Kegels nach dem Mittelpuncte des Circuls gehet, welcher dem Kegel zur Grundfläche dienet.

LXXVII.

Aehnlichkeit zweener abgekürzten Kegel.

Wenn zween abgekürzte Kegel einander ähnlich seyn sollen, so wird erfordert, erstlich, daß die Kegel, deren Stücke sie sind, einander ähnlich seyn; zweytens, daß ihre Höhen

sich

sich unter einander verhalten, wie die Strahlen ihrer Grundflächen.

LXXVIII.

Die Kugeln, und alle körperliche Figuren, die Würfel, und alle Figuren, welche aus einer einzigen Linie entstehen, sind alle, in ihrer Gattung, einander ähnlich.

Was die Kugeln und alle körperliche Figuren anlanget, so ist leicht zu sehen, daß sie einander insgesammt ähnlich seyn müssen, so wie es alle, sowol körperliche, als unkörperliche, Figuren sind, die, um beschrieben zu werden, einer einzigen Linie nöthig haben, wie der Circul, das Quadrat, der gleichseitige Triangel, der Würfel, die Walze, so um die Kugel beschrieben wird; u. a. m.

LXXIX.

Ueberhaupt sind ähnliche Körper nur in den Maaßstäben, nach welchen sie errichtet worden, unterschieden.

Ueberhaupt läßt sich von den körperlichen Figuren sagen, was wir von den unkörperlichen gesagt haben: daß sie nur in den Maaßstäben, nach welchen sie errichtet worden, unterschieden sind.

Wenn dieser einzige Satz reiflich erwogen wird, so leitet er auf zween Haupt-Lehrsätze von der Oberfläche und von dem körperlichen Inhalte ähnlicher Körper.

LXXX.

Die Oberflächen ähnlicher Körper verhalten sich unter einander, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

5 u. 6 Fig.

Der erste Satz lehret, daß die Oberflächen zweener ähnlicher Körper sich unter einander verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. So ist, zum Exempel, ein gleiches Verhältniß unter den Oberflächen der zwo ähnlichen Pyramiden z und Z, wie unter den Quadraten abcd, ABCD, die auf denen in beyden Pyramiden ähnlich liegenden Seiten ab, AB, errichtet werden.

Die-

Diesen Satz zu erfinden, darf man nur diejenige Art zu schließen brauchen, welche man (im I Th. XLIII und XLIV Art.) angewendet hat, nämlich: man muß nur in Betrachtung ziehen, daß, wenn P der Maaßstab der Pyramide Z ist, p aber der Maaßstab der ähnlichen Pyramide z, die Linien, so man zur Ausmessung der Oberflächen der Pyramide Z und des Quadrates ABCD nöthig hat, P eben so vielmal in sich halten werden, als in den Linien, so man zur Ausmessung der Oberflächen der Pyramide z und des Quadrates abcd nöthig hat, Theile p enthalten sind.

Denn es erfolget hieraus, daß das Product der Linien, welche zum Maaße der Pyramide Z und des Quadrates ABCD gehören, eine gleiche Anzahl Quadrate X, deren Seite P ist, geben wird, als das Product derer zur Ausmessung der Pyramide z und des Quadrates abcd gehörigen Linien Quadrate x, deren Seite p ist, giebt; das heißt, daß die Zahlen, welche das Verhältniß der Oberfläche der Pyramide Z zum Quadrate ABCD ausdrücken, eben dieselben seyn werden, als diejenigen, die das Verhältniß der Oberfläche z zum Quadrate abcd ausdrücken.

Einer gleichen Art zu schließen kann man sich bey Vergleichung aller andern ähnlichen Körper bedienen, es sey nun, daß selbige von geraden, oder auch von krummen Flächen eingeschlossen werden. Denn die zur Ausmessung der Oberflächen aller dieser Körper gebrauchten

ten Linien werden allezeit einerley Anzahl von den Theilen ihrer Maaßstäbe haben; und folglich werden die Producte dieser Linien auch einerley Anzahl von den Quadraten derselben Theile enthalten.

Und obgleich die zur Ausmessung der Oberflächen ähnlicher Körper benöthigten Linien incommensurabel wären, so ist dennoch klar, daß der Beweis noch immer gelten würde, wenn man hierbey nur diejenigen Grundregeln anwendete, deren man sich (im II Th. XXVIII Art.) bedienet hat, um ähnliche Figuren zu vergleichen, deren Seiten incommensurabel waren.

LXXXI.

Die Kugelflächen verhalten sich unter einander, wie die Quadrate der Strahlen der Kugeln.

Auf gleiche Art ließe sich erweisen, daß die Oberflächen der Kugeln sich unter einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Strahlen. Um aber dieses auf eine noch deutlichere Art einzusehen, darf man sich nur erinnern, daß die Flächen der Circul in gleichem Verhältnisse stehen, wie die Quadrate ihrer Strahlen; (III Th. VI Art.) und daß die Kugelflächen viermal so groß, als die Flächen ihrer größten Circul sind. (LXIX Art.)

LXXXII.

Das gleiche Verhältniß zwischen den Oberflächen ähnlicher Körper und den Quadraten ihrer ähnlich liegenden Seiten ist so allgemein, daß es sich sowol auf Körper, die man nicht messen kann, als auch auf solche, deren Maaß man zu finden weiß, erstrecket.

Zum

Zum Exempel, ob man schon die Oberfläche einer schiefstehenden Walze nicht messen kann, so kann man doch mit Gewißheit versichern, daß die Oberflächen zwoer ähnlichen schiefstehenden Walzen sich unter einander verhalten, wie die Quadrate der Diameter der Grundflächen dieser Walzen. Denn wenn man in diese zwo Walzen zwey ähnliche Prismata von einer beliebigen Anzahl Seiten beschreibet, so erkennet man aus dem, was vorhin gezeigt worden, daß die Oberflächen dieser Prismatum sich unter einander verhalten, wie die Quadrate der Diameter ihrer Grundflächen. Folglich haben die Walzen selbst, als Prismata betrachtet, die mit so vielen Seiten, als möglich ist, in ihnen beschrieben würden, proportionale Oberflächen.

LXXXIII.

Der zweyte Hauptsatz, und welcher zur Vergleichung des körperlichen Inhaltes der Körper dienet, ist folgender.

Aehnliche Körper verhalten sich unter einander, wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Aehnliche Körper verhalten sich unter einander, wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Dieser Satz kann wie der vorige erwiesen werden, wenn man erwäget, daß ähnliche Figuren nur in den Maaßstäben, nach welchen sie errichtet worden, unterschieden sind.

Dieses so einfach, als es uns möglich ist, zu erweisen, nehmen wir, zum Exempel, zwey ähnliche Prismata, Z und z, und zween Würfel, X und x, vor uns, deren Seiten denen im großen und im kleinen Prismate ähnlich liegenden 7 u. 8 Fig.

genden

genden Linien, AB, ab, gleich sind. Ferner nehmen wir zween Maaßstäbe AB, ab, welche in eine genugsame Menge Theile getheilet sind, daß man damit die Dimensionen dieser Körper messen kann. Wenn nun dies alles vorausgesetzet wird, so erhellet, daß in dem Prismate z, und in dem Würfel x, sich just so viel Würfel, die nach den Theilen von ab errichtet worden, befinden, als in dem Prismate Z, und in dem Würfel X, Würfel, die nach den Theilen von AB errichtet worden, befindlich sind.

Diese Art zu schließen kann man bey allen anderen Körpern anwenden. Und selbst diejenigen, welche incommensurable Höhen, Breiten oder Dicken haben, verhalten sich ebenfalls, wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten.

LXXXIV.

Die Kugeln verhalten sich unter einander, wie die Würfel ihrer Strahlen.

So verhalten sich, zum Exempel, die Kugeln, nach ihrem körperlichen Inhalte, wie die Würfel ihrer Strahlen.

E N D E.

Inhalt

Inhalt
des ganzen Werkes.

Erster Theil.

Von den Mitteln, die man natürlichster Weise anwenden mußte, zur Ausmessung der Felder und Plätze zu gelangen.

II. Die gerade Linie ist die kürzeste von einem Puncte zum andern, und folglich das Maaß der Weite zwischen zweenen Puncten. 2 Seite

III. Eine Linie, die auf eine andere fällt, ohne sich gegen irgend eine Seite zu neigen, ist mit derselben Linie perpendicular, oder senkrecht. eben daselbst

IV. Das Rectangel ist eine Figur von vier Seiten, die insgesammt mit einander senkrecht sind. 3

Und das Quadrat ist ein Rectangel, dessen vier Seiten einander gleich sind. e. d.

V. Einen Perpendicul aufzurichten. 4

VI. Der Circul ist der ganze Zug, welchen der bewegliche Fuß eines Zirkels beschreibet, indem er sich um den andern veststehenden Fuß drehet. 5

Der Mittelpunct ist der Ort des veststehenden Zirkelfußes. e. d.

Der Strahl (radius) ist die Weite der Oeffnung des Zirkels. 6

Der Diameter ist die doppelte Länge des Strahles. e. d.

VII. Einen Perpendicul zu fällen. 6 S.
VIII. Eine Linie in zwey gleiche Theile zu theilen. 7
IX. Ein Quadrat zu beschreiben, dessen Seite gegeben wird. e. d.
X. Ein Rectangel zu beschreiben, dessen Länge und Breite gegeben werden. e. d.
XI. Parallel-Linien sind solche Linien, die immer in gleicher Weite von einander abstehen. 8
Durch einen gegebenen Punct eine Linie mit einer andern parallel zu ziehen. e. d.
XII. Der Inhalt eines Rectangels ist das Product seiner Höhe durch seine Grundlinie. 10
XIII. Geradlinichte Figuren sind diejenigen, welche von geraden Linien eingeschlossen werden. e. d.
Der Triangel ist eine Figur, die von drey geraden Seiten eingeschlossen wird. 11
XIV. Die Diagonal-Linie eines Rectangels ist diejenige Linie, welche dasselbe in zween gleiche Triangel theilet. e. d.
Rechtwinkelichte Triangel sind diejenigen, von deren Seiten zwo senkrecht auf einander stehen. 12
Ein Triangel ist die Hälfte eines Rectangels, welches einerley Grundlinie und einerley Höhe mit ihm hat. e. d.
Folglich ist dessen Inhalt das halbe Product seiner Höhe durch seine Grundlinie. e. d.
XV. Triangel, welche einerley Höhe und einerley Grundlinien haben, sind von gleichem Inhalte. 13
XVII. Triangel, welche einerley Grundlinien haben, und zwischen einerley Parallel-Linien stehen, sind von gleichem Inhalte. 14
XVIII. Das Parallelogrammum ist eine Figur von vier Seiten, deren zwo einander gegenüber stehende parallel sind. 15

Sein

Sein Inhalt ist das Product seiner Höhe durch seine Grundlinie. 15 S.
XIX. Parallelogramma, welche einerley Grundlinien haben, und zwischen einerley Parallel-Linien stehen, sind von gleichem Inhalte. e. d.
XX. Ordentliche (reguläre) Vielecke sind Figuren, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden, die insgesammt einerley Neigung gegen einander haben. 16
XXI. Ein Vieleck von einer bestimmten Anzahl Seiten zu beschreiben. e. d.
Das Fünfeck hat fünf, das Sechseck sechs, das Siebeneck sieben, das Achteck acht, das Neuneck neun, das Zehneck zehen Seiten, u. s. w. 17
XXII. Den Inhalt eines ordentlichen Vieleckes zu finden. e. d.
Das Apothema ist der Perpendicul, welcher aus dem Mittelpuncte des Vieleckes auf eine von dessen Seiten gefället wird. e. d.
XXIII. Ein gleichseitiger Triangel ist derjenige, dessen drey Seiten einander gleich sind. e. d.
Wie ein gleichseitiger Triangel beschrieben wird. 18
XXVI. Nach allen drey bekannten Seiten eines Triangels einen andern Triangel zu machen, welcher dem ersten gleich und ähnlich ist. 20
XXVII. Ein Winkel ist die Neigung einer Linie gegen die andere. 21
XXVIII. Einen Winkel zu machen, der einem andern gleich ist. 22
Wenn zu einem Triangel zwo Seiten mit dem dazwischen befindlichen Winkel gegeben werden, so ist der ganze Triangel bestimmt. e. d.
XXIX. Zweyte Art, einen Winkel dem andern gleich zu machen. 23

Die Sehne eines Circulbogens ist die gerade Linie, welche von einem Punete des Umkreises bis zu einem andern gehet. 23 S.
XXX. Zween Winkel und eine Seite bestimmen den ganzen Triangel. e. d.
XXXI. Ein gleichschenkelichter Triangel ist derjenige, welcher zwo gleiche Seiten hat. 24
Die Winkel, so diese Seiten mit der Grundlinie machen, sind einander gleich. e. d.
XXXIV. Worinnen die Aehnlichkeit zwoer Figuren bestehet. 27
XXXVI. Eine Figur zu machen, die einer andern ähnlich ist. 28
XXXVIII. Wenn zween Winkel eines Triangels zweenen Winkeln eines andern Triangels gleich sind, so ist der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern gleich. 30
XXXIX. Zween Triangel, deren Winkel, nach ähnlicher Lage, einander gleich sind, haben proportionale Seiten. 31
XL. Eine Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. 33
XLI. Was die vierte Proportional-Linie zu drey anderen Linien ist, und wie sie gefunden wird. e. d.
XLII. Die Höhen ähnlicher Triangel sind mit deren Seiten proportional. 34
XLIV. Die Flächen ähnlicher Triangel verhalten sich unter einander, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten. 35
XLV. Eigenschaften ähnlicher Figuren, die aus den Eigenschaften der Triangel erfolgen. 36
XLVII. Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich unter einander, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten. 38
XLVIII. Aehnliche Figuren sind in nichts unterschieden, als in den Maaßstäben, nach welchen sie beschrieben worden. e. d.

L. Die Weite eines Ortes zu messen, wohin man nicht kommen kann. 39 S.
LII. Das Maaß eines Winkels ist der Circulbogen, den seine Seiten zwischen sich einschließen. 41
LIII. Der Circul wird eingetheilet in 360 gleiche Grade; jedweder Grad in 60 Minuten, u. s. w. 42
LIV. Ein rechter Winkel (Quadrant) hält 90 Grade, und seine Schenkel stehen senkrecht auf einander. e. d.
LV. Ein spitziger Winkel ist kleiner, als ein rechter Winkel. e. d.
LVI. Ein stumpfer Winkel ist größer, als ein rechter Winkel. 43
LVII. Die Summe aller Winkel, so man, nach einer Seite, auf einer geraden Linie machen kann, und welche in einen Punct zusammen stoßen, beträgt 180 Grade. e. d.
LVIII. Alle Winkel, so man um einen Punct herum machen kann, sind, zusammen genommen, vier rechten Winkeln gleich. e. d.
LIX. Gebrauch des Feld-Winkelmessers, (Astrolabii,) die Größe eines Winkels zu messen. e. d.
LX. Gebrauch des Winkelmessers, (Transporteur,) einen Winkel von einer bestimmten Anzahl Grade zu machen. 44
LXIII. Wechselswinkel sind umgekehrte Winkel, welche eine gerade Linie, wenn sie zwo Parallel-Linien durchschneidet, von beyden Seiten her macht. 47
Diese Winkel sind einander gleich. 48
LXIV. Die Summe aller drey Winkel eines Triangels ist zweenen rechten Winkeln gleich. e. d.
LXVI. In einem Triangel kann nur ein rechter Winkel seyn. 49
LXVII. Wenn ein Winkel eines Triangels ein rechter Winkel ist, so ist die Summe der zwee-

zweenen andern einem rechten Winkel gleich. 49 S.
LXVIII. Der äußere Winkel eines Triangels ist so groß, als die zween inneren ihm gegenüber stehenden zusammen. e. d.
LXIX. Ein Winkel eines gleichschenkelichten Triangels giebt die zween übrigen Winkel. e. d.
LXX. In einem gleichseitigen Triangel hält jeder Winkel 60 Grade. 50
LXXI. Ein Sechseck zu beschreiben. e. d.
LXXII. Die Hälfte des Winkels am Mittelpuncte im Sechsecke giebt den Winkel am Mittelpuncte für das Zwölfeck. 51
LXXIII. Einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen. e. d.
LXXIV. Vielecke von 24, von 48 rc. Seiten zu beschreiben. 52
LXXV. Beschreibung des Achteckes; e. d.
Und der Vielecke von 16, von 32 rc. Seiten. e. d.

Zweyter Theil.

Von der geometrischen Methode, geradlinichte Figuren zu vergleichen.

I. Zwey Rectangel von gleicher Höhe verhalten sich gegen einander, wie ihre Grundlinien. 55
V. Ein Rectangel in ein anderes von gegebener Höhe zu verwandeln. 56
VI. Zweyte Art, ein Rectangel in ein anderes von gegebener Höhe zu verwandeln. 57
VII. Man erweiset nach größter Schärfe, daß, wenn zwey Rectangel einander gleich sind, die Grundlinie des ersten zur Grundlinie des andern sich verhält, wie die Höhe des andern zur Höhe des ersten. 58
VIII. Wenn vier Linien so beschaffen sind, daß die erste zur zweyten sich verhält, wie die dritte zur vierten, so ist das aus der ersten und aus der

der vierten Linie errichtete Rectangel gleich demjenigen, welches aus der zweyten und aus der dritten errichtet wird. 59 S.
IX. Vier Größen, deren erste zur zweyten sich verhält, wie die dritte zur vierten, machen zusammen eine Proportion. e. d.
X. Von den vier Größen einer Proportion werden die erste und die vierte die äußersten Glieder, die zweyte und die dritte aber die mittleren Glieder genennt. e. d.
XI. In einer Proportion ist das Product der äußersten Glieder gleich dem Producte der mittleren Glieder. 60
XII. Wenn das Product der äußersten Glieder dem Producte der mittleren gleich ist, so machen diese vier Glieder eine Proportion. e. d.
XIII. Hieraus wird die Regel Detri hergeleitet; oder die Art, das vierte Glied einer Proportion zu finden, deren drey erste Glieder gegeben sind. e. d.
XVI. Ein Quadrat zu machen, welches doppelt so groß, als ein anderes ist. 63
XVII. Ein Quadrat zu machen, welches zweyen andern, zusammen genommen, gleich ist. 64
XVIII. Die Hypothenuse des rechtwinkelichten Triangels ist dessen größte Seite. 67
Und das Quadrat dieser größten Seite ist den Quadraten der zwo übrigen Seiten im Inhalte gleich. e. d.
XIX. Hieraus ergiebt sich eine ganz einfache Art, zwey Quadrate in eines zu bringen. e. d.
XX. Wenn die Seiten eines rechtwinkelichten Triangels drey ähnlichen Figuren zu Grundlinien dienen, so ist diejenige Figur, die auf der größten Seite beschrieben wird, den beyden anderen Figuren gleich. e. d.
XXI. Viel ähnliche Figuren in eine einzige zu bringen. 68

XXIII. Wenn eine Zahl durch sich selbst multipliciret wird, so ist das Product, welches heraus kömmt, das Quadrat derselben Zahl. 70 S.
Die Wurzel eines Quadrates ist diejenige Zahl, die durch sich selbst multipliciret, das Quadrat giebt. 71
XXIV. Eine Zahl ist das Vielfache einer andern, wenn sie dieselbe gewissemal völlig enthält. e. d.
Die Seite eines Quadrates, und seine Diagonal-Linie, sind incommensurabel. 72
XXV. Andere incommensurable Linien. e. d.
XXVII. Aehnliche Triangel und Figuren haben proportionale Seiten, auch alsdenn, wenn ihre Seiten incommensurabel sind. 75
XXVIII. Aehnliche Figuren verhalten sich unter einander, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. e. d.

Dritter Theil.

Von dem Maaße der Circulförmigen Figuren, und von deren Eigenschaften.

I. Der Inhalt des Circuls ist das Product seines Umkreises durch die Hälfte seines Strahles. 79
II. Die Fläche des Circuls ist einem Triangel gleich, dessen Höhe der Strahl, und die Grundlinie eine gerade Linie ist, die mit dem Umkreise einerley Länge hat. e. d.
IV. Wenn der Diameter eines Circuls 7 Theile hat, so hält der Umkreis deren beynahe 22. 80
V. Die Umkreise der Circul verhalten sich unter einander, wie ihre Diameter, oder wie ihre Strahlen. 81
VI. Die Flächen der Circul sind mit den Quadraten ihrer Strahlen proportional. e. d.

VII. Von

VII. Von drey Circuln, deren Strahlen die drey Seiten eines rechtwinkelichten Triangels sind, ist derjenige Circul, welchen die Hypothenuse giebt, so groß im Inhalte, als die zween anderen zusammen. 82 S.

VIII. Ein Ring ist der Raum, welchen zween concentrische Circul einschließen. 83

Der Inhalt eines Ringes wird gefunden, wenn man seine Breite durch seinen mittleren Umkreis multipliciret. 84

IX. Ein Circul-Abschnitt ist ein Raum, welcher von einem Circulbogen und von einer Sehne eingeschlossen wird. 85

Die Ausmessung aller Circulförmigen Figuren kömmt auf das Maaß des Abschnittes an. e. d.

X. Ein Circul-Ausschnitt ist ein Stück des Circuls, welches von zweenen Strahlen, und von dem dazwischen befindlichen Bogen eingeschlossen wird. e. d.

Wie der Inhalt des Ausschnittes und des Abschnittes gefunden wird. 86

XI. Den Mittelpunct eines jeden Circulbogens zu finden. e. d.

XII. Drey gegebene Puncte in einen Circul zu bringen. 87

Um einen jedweden Triangel einen Circul zu beschreiben. e. d.

XIII. Wenn man aus einem beliebigen Puncte des Umkreises eines halben Circuls nach den Endpuncten des Diameters zwo gerade Linien ziehet, so bekömmt man allezeit einen rechten Winkel. 88

XV. Alle Winkel, deren Gipfel im Umkreise eines Circuls liegen, und deren Schenkel auf einerley Bogen stehen, sind einander gleich, und haben zu ihrem gemeinschaftlichen Maaße die Hälfte des Bogens, auf welchem sie stehen. 91

XVIII. Der Tangent am Circul ist diejenige Linie, welche den Circul in einem einzigen Puncte berühret, ohne ihn irgendwo zu durchschneiden. 94 S.
Der Winkel am Abschnitte ist derjenige Winkel, welchen die Sehne und der Tangent machen. e. d.
Sein Maaß ist die Hälfte des Bogens des Abschnittes. e. d.
XIX. Der Tangent ist allezeit perpendicular mit demjenigen Diameter des Circuls, welcher durch den Berührungspunct gehet. 95
XXI. Was ein Abschnitt sey, welcher eines gegebenen Winkels fähig ist. 96
Einen Abschnitt, der eines gegebenen Winkels fähig ist, zu beschreiben. e. d.
XXII. Die Weite eines Ortes von drey anderen zu finden, deren Lagen bekannt sind. 97
XXIII. Wenn in einem Circul zwo Sehnen einander durchschneiden, so ist das Rectangel aus den Theilen der einen gleich dem Rectangel aus den Theilen der andern. 100
XXIV. In einem Circul ist das Quadrat eines jeglichen Perpendiculs, der auf dem Diameter errichtet wird, gleich dem Rectangel der beyden Theile des Diameters. e. d.
XXV. Ein Rectangel in ein Quadrat zu verwandeln. e. d.
XXVI. Was die mittlere Proportional-Linie zwischen zwo geraden Linien ist. 101
Wie sie gefunden wird. e. d.
XXVII. Andere Art, dieselbe zu finden. e. d.
XXVIII. Eine geradlinichte Figur in ein Quadrat zu verwandeln. 102
XXX. Ein Quadrat zu machen, welches mit einem andern ein gegebenes Verhältniß hat. 103
XXXI. Ein Vieleck zu machen, welches mit einem andern ähnlichen Vielecke ein gegebenes Verhältniß hat. 104

XXXII. Ei=

XXXII. Einen Circul zu machen, welcher mit einem andern ein gegebenes Verhältniß hat. 104 S.
XXXIII. Wenn man aus einem Puncte, der außer dem Circul liegt, zwo Linien ziehet, welche durch den Circul gehen, so sind die Rectangel dieser Linien, durch ihre äußere Theile, einander gleich. 105
XXXIV. Das Quadrat des Tangenten ist gleich dem Rectangel des Secanten, durch seinen äußeren Theil. e. d.
XXXV. Aus einem außer dem Circul gegebenen Puncte einen Tangenten zu ziehen. 106

Vierter Theil.

Von der Art, körperliche Figuren und ihre Oberflächen auszumessen.

I. Der Würfel ist eine körperliche Figur, welche in sechs Quadrate eingeschlossen ist. Er dienet zum gemeinschaftlichen Maaße der Körper. 109
II. Das Parallelepipedum ist eine körperliche Figur, welche in sechs Rectangel eingeschlossen ist. e. d.
Parallel-Flächen sind diejenigen, die immer in gleicher Weite von einander abstehen. e. d.
III. Den körperlichen Inhalt des Parallelepipedi zu finden. 110
IV. Das Parallelepipedum entstehet, wenn ein Rectangel sich, mit sich selbst parallel bleibend, an einer Linie auf- oder unterwärts beweget. 111
V. Eine Perpendicular-Linie auf einer geraden Fläche ist diejenige Linie, die sich nach keiner Seite derselben Fläche neiget. 112
Eine gleiche Bewandniß hat es mit einer geraden Fläche, welche auf einer andern perpendicular stehet. e. d.

VI. Eine

VI. Eine Linie, die mit einer geraden Fläche perpendicular stehet, ist mit allen Linien derselben Fläche, welche aus dem Puncte, wo diese Linie stehet, ihren Anfang nehmen, perpendicular. 112 S.
VIII. Auf eine leichte practische Art einen Perpendicul über einer geraden Fläche aufzurichten, oder auch darauf zu fällen. 113
IX. Eine Linie ist mit einer geraden Fläche perpendicular, wenn sie mit zwoen Linien derselben Fläche, die aus dem Puncte, wo sie stehet, ihren Anfang nehmen, perpendicular ist. 114
X. Auf einer geraden Fläche eine andere solche Fläche perpendicular aufzurichten. e. d.
XI. Eine gerade Fläche mit einer andern solchen Fläche parallel zu führen. 115
XII. Die Neigung, so zwo gerade Flächen gegen einander machen, zu messen. e. d.
XIII. Die Neigung einer Linie gegen eine gerade Fläche zu messen. 116
XIV. Neue Art, auf eine gerade Fläche einen Perpendicul zu fällen. 117
XV. Zweyte Art, auf einer geraden Fläche einen Perpendicul aufzurichten. e. d.
XVI. Das geradstehende Prisma ist eine körperliche Figur, deren zwo einander gegenüber stehende Grundflächen zwey gleiche und ähnliche Vielecke, die Seitenflächen aber Rectangel sind. e. d.
XVII. Wie die geraden Prismata entstehen. 118
XIX. Zwey Prismata von gleichen Grundflächen verhalten sich unter einander, wie ihre Höhen. e. d.
XX. Zwey Prismata von gleicher Höhe verhalten sich unter einander, wie ihre Grundflächen. 119

XXI. Der

XXI. Der körperliche Inhalt des geraden Prismatis ist das Product seiner Grundfläche, durch seine Höhe. 120 S.
XXII. Die schiefen Prismata sind von den geraden darinnen unterschieden, daß ihre Seitenflächen keine Rectangel, sondern Parallelogramma sind. e. d.
XXIII. Wie die schiefen Prismata entstehen. 121
XXIV. Ein schiefes Prisma ist einem geraden gleich, wenn es mit ihm eine gleiche Grundfläche und einerley Höhe hat. 122
XXV. Ein gleiches gilt auch von dem schiefen Parallelepipedo, in Ansehung des geraden. e. d.
XXVI. Die Pyramide ist ein Körper, welcher in eine gewisse Anzahl Triangel eingeschlossen ist, die alle aus einem Gipfel kommen, und mit ihren Grundlinien an den Seiten eines Vieleckes anliegen. 123
XXX. Pyramiden, die gleiche Grundflächen und einerley Höhen haben, sind von gleichem körperlichen Inhalte. 125
XXXII. Worinnen die Aehnlichkeit zwoer Pyramiden bestehet. 127
XXXVII. Pyramiden, die einerley Höhe und gleiche Grundflächen haben, sind einander gleich. 130
XXXVIII. Auch solche Pyramiden, von einerley Höhe, sind einander gleich, deren Grundflächen zwar keine ähnliche Vielecke, aber doch von gleichem Inhalte sind. e. d.
XXXIX. Pyramiden, die einerley Höhe haben, verhalten sich unter einander, wie ihre Grundflächen. 131
XLII. Der körperliche Inhalt einer jeglichen Pyramide ist das Product ihrer Grundfläche durch den dritten Theil ihrer Höhe. 136
XLIII. Die Pyramide ist der dritte Theil eines Prismatis, welches mit ihr eine gleiche Grundfläche und einerley Höhe hat. e. d.

XLV. Der Cylinder ist ein Körper, welcher von zweenen einander gegenüber stehenden und parallelen Circuln, und von einer um deren Umkreise gebogenen Fläche eingeschlossen ist. 137 S.
Unterschied zwischen dem geradstehenden und dem schiefen Cylinder. e. d.
XLVI. Wie ein Cylinder entstehet. e. d.
XLVII. Die krumme Oberfläche eines geradstehenden Cylinders ist einem Rectangel gleich, welches einerley Höhe mit dem Cylinder hat, und dessen Grundlinie dem Umkreise des Cylinders gleich ist. 139
XLIX. Die Cylinder, welche gleiche Grundflächen und einerley Höhen haben, sind ihrem körperlichen Inhalte nach einander gleich. 140
L. Der körperliche Inhalt eines jedweden Cylinders ist das Product seiner Grundfläche, durch seine Höhe. e. d.
LI. Der Kegel ist eine Art von Pyramiden, deren Grundfläche ein Circul ist. e. d.
LII. Unterschied zwischen dem geradstehenden und dem schiefen Kegel. e. d.
LIII. Der Inhalt der krummen Oberfläche eines geradstehenden Kegels ist das Product der Hälfte seiner Seite, durch den Umkreis seiner Grundfläche. 141
LIV. Die krumme Oberfläche eines Kegels, wenn sie in eine gerade Fläche gebracht wird, hat die Figur eines Circul-Ausschnittes. 142
LVI. Kegel, so gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind nach ihrem körperlichen Inhalte einander gleich. e. d.
LVII. Der körperliche Inhalt eines jeglichen Kegels ist das Product seiner Grundfläche, durch den dritten Theil seiner Höhe. e. d.
LIX. Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels zu messen. 144

LX. Die Kugel ist derjenige Körper, in dessen Oberfläche alle Puncte von seinem Mittelpuncte gleich weit entfernet sind. 144 S.
LXI. Die Kugel entstehet, wenn sich ein halber Circul um seinen Diameter drehet. 145
LXV. Die Oberfläche der Kugel hat zum Maaße das Product ihres Diameters durch den Umkreis ihres größten Circuls. 150
LXVI. Was ein Kugel-Abschnitt ist. 151
Wie man dessen Oberfläche ausmisset. e. d.
LXVII. Die Oberfläche der Kugel ist gleich der krummen Oberfläche des um die Kugel beschriebenen Cylinders. e. d.
LXVIII. Die Scheiben der Kugel und des um sie beschriebenen Cylinders sind, nach ihren krummen Oberflächen, einander gleich. 152
LXIX. Die Oberfläche der Kugel ist gleich der Fläche ihres größten Circuls, viermal genommen. e. d.
LXX. Der körperliche Inhalt der Kugel ist das Product des dritten Theiles des Strahles, durch die Fläche ihres größten Circuls, viermal genommen. e. d.
LXXI. Der körperliche Inhalt der Kugel beträgt zwey Drittel vom körperlichen Inhalte des um sie beschriebenen Cylinders. 153
LXXII. Den körperlichen Inhalt eines Kugel-Abschnittes zu finden. e. d.
LXXIII. Worinnen die Aehnlichkeit zweener Körper bestehet, welche in gerade Flächen eingeschlossen sind. 154
LXXIV. Bedingungen, wodurch die Aehnlichkeit zweener geradstehenden Cylinder bestimmet wird. 155
LXXV. Aehnlichkeit zweener schiefen Cylinder. e. d.
LXXVI. Aehnlichkeit zweener Kegel. e. d.
LXXVII. Aehnlichkeit zweener abgekürzten Kegel. e. d.

LXXVIII. Die

LXXVIII. Die Kugeln, und alle körperliche Figuren, die Würfel, und alle Figuren, welche aus einer einzigen Linie entstehen, sind alle, in ihrer Gattung, einander ähnlich. 156 S.
LXXIX. Ueberhaupt sind ähnliche Körper nur in den Maaßstäben, nach welchen sie errichtet worden, unterschieden. e. d.
LXXX. Die Oberflächen ähnlicher Körper verhalten sich unter einander, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. e. d.
LXXXI. Die Kugelflächen verhalten sich unter einander, wie die Quadrate der Strahlen der Kugeln. 158
LXXXIII. Aehnliche Körper verhalten sich unter einander, wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten. 159
LXXXIV. Die Kugeln verhalten sich unter einander, wie die Würfel ihrer Strahlen. 160

Nachricht für den Buchbinder.

Zu diesem Werke gehören XIV Kupfer-Tafeln. Die I wird geheftet nach der 10 Seite; die II nach der 18 S. die III nach der 24 S. die IV nach der 38 S. die V nach der 44 S. die VI nach der 52 S. die VII nach der 76 S. die VIII nach der 88 S. die IX nach der 96 S. die X nach der 106 S. die XI nach der 120 S. die XII nach der 122 S. die XIII nach der 137 S. die XIV nach der 145 S.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Clairaut, Alexis Claude,

Des Herrn Clairaut, der Königl. Französischen und Königl. Preußischen Akademien der Wissenschaften, der Königl. Gesellschaften zu London, Upsal und Edimburg, und der Akademie des Instituts zu Bologna Mitgliedes, Anfangsgründe der Geometrie

Hamburg 1773

Math.p. 79 f
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081601-0
VD18 13130382